Tipler

Capítulo 3

Movimento em Duas e Três Dimensões

Vamos agora ampliar a descrição do movimento de uma partícula a duas e a três dimensões. Nestes casos, o deslocamento, a velocidade e a aceleração são grandezas que têm uma direção no espaço, além de uma magnitude. Estas grandezas são **vetores.** Nos capítulos adiante, encontraremos muitas outras grandezas vetoriais, como força, momento e campo elétrico. As grandezas que só têm magnitude, mas não têm uma direção, como distância, massa ou temperatura, são denominadas **escalares.**

Neste capítulo, investigaremos as propriedades gerais dos vetores e as propriedades particulares dos vetores deslocamento, velocidade e aceleração. Muitos traços interessantes do movimento em três dimensões também estão presentes no movimento em duas dimensões. Em virtude de o movimento bidimensional ser mais fácil de ilustrar sobre uma folha de papel, ou num quadro-negro, a maior parte dos nossos exemplos será limitada a duas dimensões. Dois casos especiais importantes, o movimento dos projéteis e o movimento circular, serão detalhadamente discutidos.

3.1 O Vetor Deslocamento e a Adição de Vetores

Se você perguntar a alguém onde fica a agência de correio e receber a resposta que está a 10 quarteirões, perguntará, com certeza, em que direção, antes de ir para ela. Faz bastante diferença se estiver 10 quarteirões a leste, ou 10 para o norte, ou 6 para oeste e 8 para o sul (o que perfaz um total de 14 quarteirões para andar, embora apenas 10 "em vôo de abelha"). A grandeza que dá a distância retilínea e a direção de um ponto do espaço até outro é um segmento de reta orientado que se denomina **vetor deslocamento.** Usamos os vetores deslocamento para ilustrar os resultados gerais sobre os vetores pois, por definição, os **vetores** *são grandezas que têm magnitude (módulo) e direção e que se adicionam e subtraem como deslocamentos.* Representa-se graficamente um vetor por uma seta cuja direção é a direção do vetor e cujo comprimento é proporcional ao módulo do vetor.

A Figura 3-1 mostra a trajetória de uma partícula que se desloca do ponto P_1 até o ponto P_2 e depois até um terceiro ponto P_3. O deslocamento do ponto P_1 até o ponto P_2 é representado pela seta **A.** Observe que o deslocamento **A** não depende da trajetória percorrida pela partícula ao passar de P_1 a P_2, e só depende dos pontos terminais P_1 e P_2. Um segundo deslocamento, de P_2 a P_3, está indicado pela seta B. O deslocamento resultante, de P_1 a P_3, está representado pela seta **C.** O vetor deslocamento resultante **C** é a soma dos dois deslocamentos sucessivos, **A** e **B:**

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

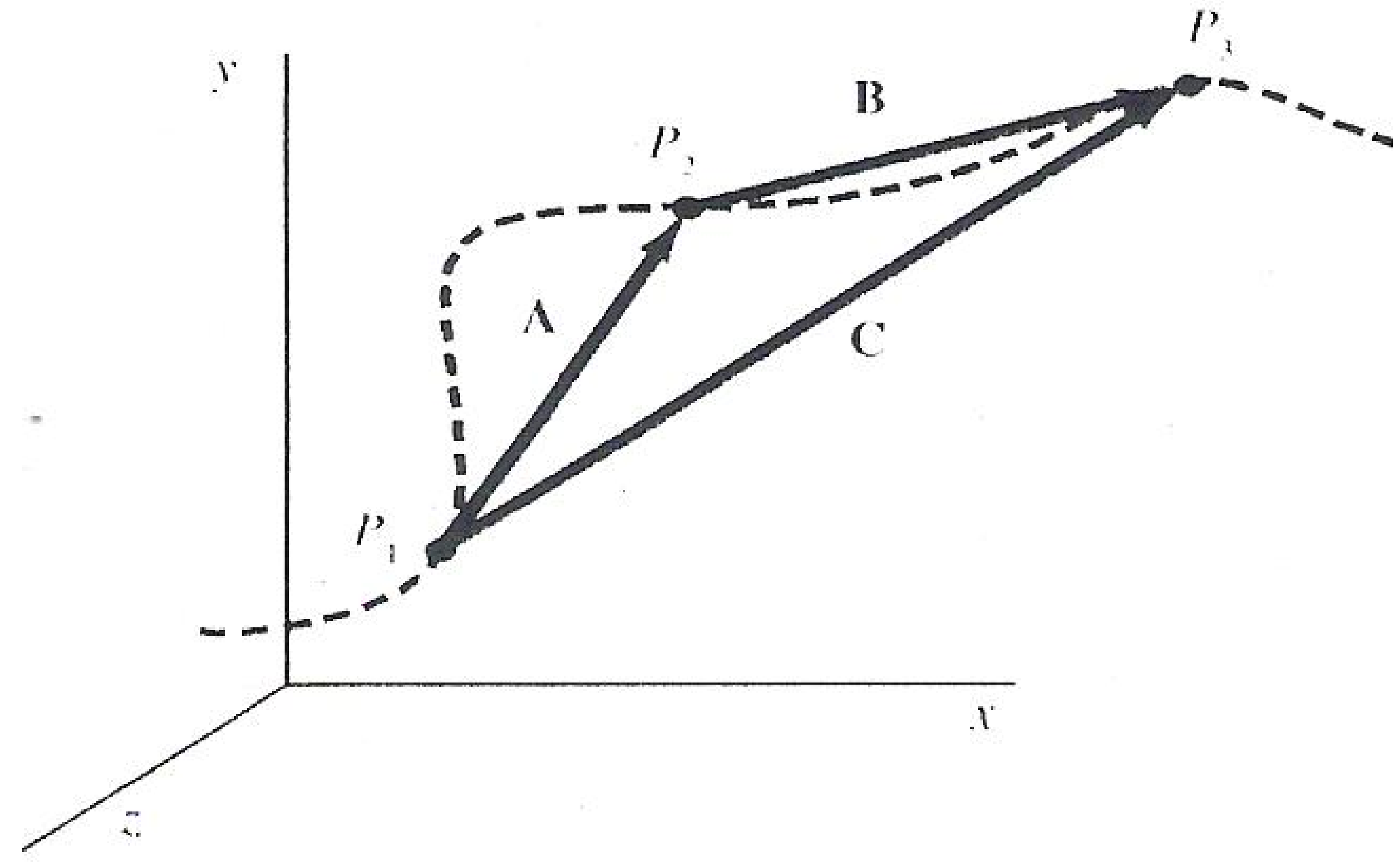


Figura 3-1 A adição de vetores. O deslocamento C é equivalente a dois deslocamentos sucessivos **A** e **B**; isto é **C** = **A** + **B**.

Quaisquer dois vetores (cujas unidades sejam as mesmas) podem ser somados graficamente desta forma, colocando-se o pé de uma das setas na extremidade da outra.

O vetor resultante vai, então, do pé do primeiro vetor até a extremidade do segundo vetor.

As grandezas vetoriais serão representadas por tipos em negrito, como **A**. Usaremos esta convenção em todo o texto, a fim de distinguir as grandezas vetoriais das grandezas escalares, que são simbolizadas por letras em itálico. (Nos manuscritos, o vetor é simbolizado por uma seta superposta ao símbolo, por exemplo $\vec{A}$.) O módulo de um vetor **A** se escreve |**A**| ou simplesmente *A*. Ordinariamente, o módulo de um vetor tem unidades físicas. Por exemplo, o vetor deslocamento tem um módulo que pode ser expresso em metros, ou centímetros, ou qualquer outra unidade de distância.

A soma dos módulos de **A** e de **B** não é igual ao módulo de **C** a menos que **A** e **B** estejam na mesma direção. Isto é, **C** = **A** + **B** não acarreta $C = A + B$.

Exemplo 3.1

Um homem anda 3 km para leste e depois 4 km para o norte. Qual o deslocamento resultante?

Os dois deslocamentos e o deslocamento resultante aparecem na Figura 3-2. Uma vez que os três vetores formam um triângulo retângulo, podemos achar o módulo do deslocamento resultante mediante o teorema de Pitágoras, que nos dá

$$C^2 = A^2 + B^2 = (3\ \text{km})^2 + (4\ \text{km})^2 = 25\ \text{km}^2$$
$$C = \sqrt{25\ \text{km}^2} = 5\ \text{km}$$

A fim de descrever o deslocamento resultante, precisamos dar não só o seu módulo mas também a sua direção. Se θ for o ângulo entre o eixo leste e o deslocamento resultante, temos pela Figura 3-2

$$\tan\theta = \frac{4\ \text{km}}{3\ \text{km}} = 1{,}33$$

Podemos achar θ por uma tábua trigonométrica, ou por uma calculadora que disponha de funções trigonométricas:

$$\theta = \tan^{-1} 1{,}33 = 53{,}1^\circ$$

O deslocamento resultante é, portanto, de 5 km dirigido 53,1° ao norte da direção leste.

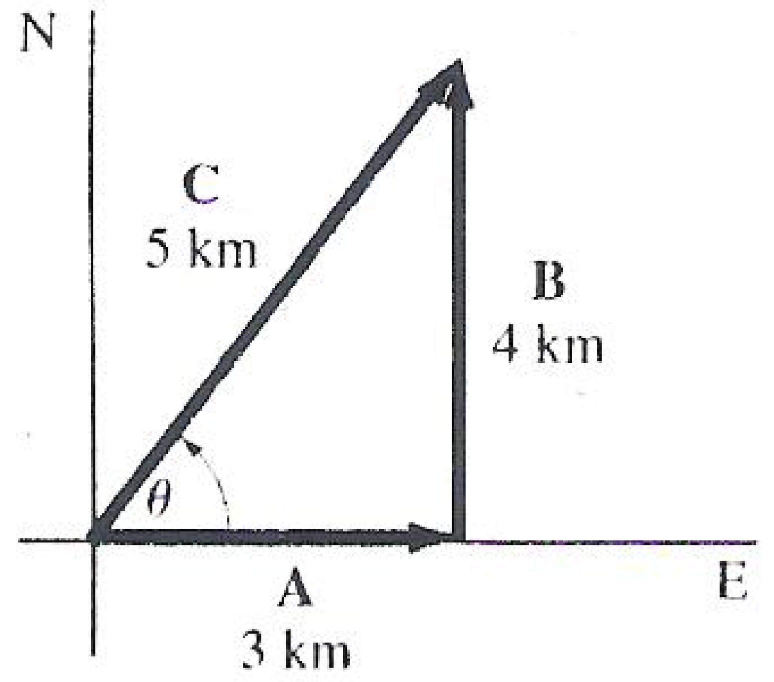


Figura 3-2 Os vetores deslocamento do Exemplo 3.1. O módulo do deslocamento resultante, vetor **C**, pode ser calculado pelo teorema de Pitágoras.

Exemplo 3.2

Uma pessoa anda 3 km para leste e depois 4 km numa direção a 60° ao norte do leste. Qual o deslocamento resultante?

Os vetores deslocamento deste exemplo aparecem na Figura 3-3. Neste caso, o triângulo formado pelos três vetores não é um triângulo retângulo, de modo que o teorema de Pitágoras não pode ser usado para calcular o deslocamento resultante. Na próxima seção, aprenderemos como achar o vetor resultante, num caso como este, por meio das componentes do vetor. No momento, acharemos graficamente a resultante, mediante o desenho em escala de cada deslocamento e a medição do deslocamento resultante. Por exemplo, se o primeiro vetor deslocamento for desenhado como um segmento de 3 cm e o segundo como um segmento de 4 cm, poderemos estimar o vetor resultante como um segmento de 6 cm. Então, o módulo do deslocamento resultante é 6 km. O ângulo entre o deslocamento resultante e a direção leste pode ser medido com um transferidor. É cerca de 35°.

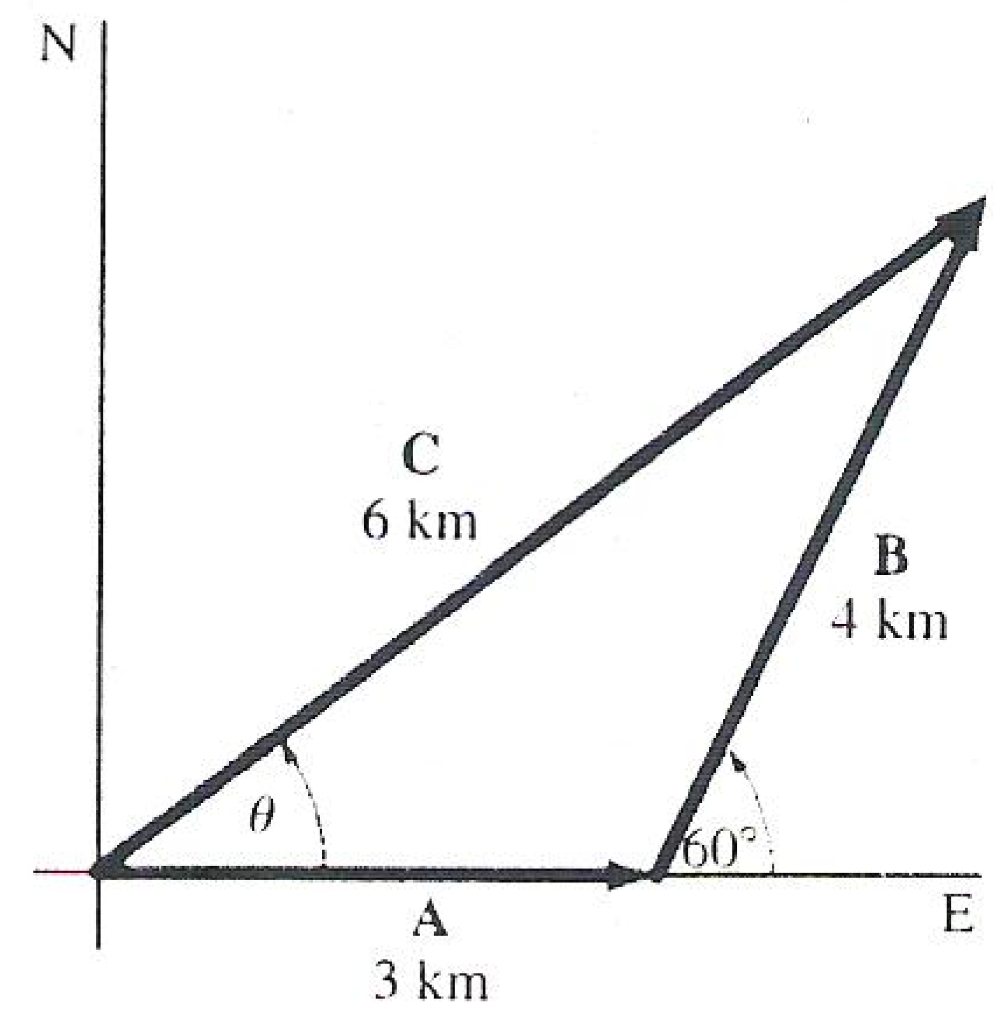


Figura 3-3 Os vetores deslocamento do Exemplo 3.2. Uma vez que **A** e **B** não são perpendiculares, o teorema de Pitágoras não pode ser usado para o cálculo do módulo de **C.** Em lugar deste teorema, **C** pode ser estimado graficamente.

Uma vez que os vetores se definem somente pelo módulo e pela direção, dois vetores serão iguais se tiverem o mesmo módulo e a mesma direção, independentemente das respectivas origens. Num gráfico, dois vetores serão iguais se tiverem o mesmo comprimento e forem paralelos um ao outro. Assim, todos os vetores da Figura 3-4 são iguais. A Figura 3-5*a* mostra dois vetores **A** e **B** cuja soma é **C.** Na Figura 3-5*b*, deslocamos o vetor **B** paralelamente a si mesmo, de modo a ter a origem coincidente com a do vetor **A.** O vetor resultante **C** está sobre a diagonal do paralelogramo formado por **A** e **B.** A adição gráfica de dois vetores, mediante a coincidência das origens e a determinação da diagonal do paralelogramo formado pelos vetores, é conhecida como a **regra do paralelogramo para a adição vetorial.** Pela Figura 3-5*b*, podemos ver que não faz diferença a ordem da adição dos dois vetores, isto é, **A** + **B** = **B** + **A.**

Podemos subtrair o vetor **B** do vetor **A,** conforme está na Figura 3-6*a*, pela adição a **A** de −**B,** que é um vetor que tem o mesmo módulo de **B** mas direção oposta. O resultado é **C** = **A** + (−**B**) = **A** − **B.** Outro método de subtração, ilustrado na Figura 3-6*b*, é o de desenhar dois vetores **A** e **B** com as origens coincidentes e depois observar que o vetor **C** = **A** − **B** é o vetor que somado a **B** leva ao vetor resultante **A.**

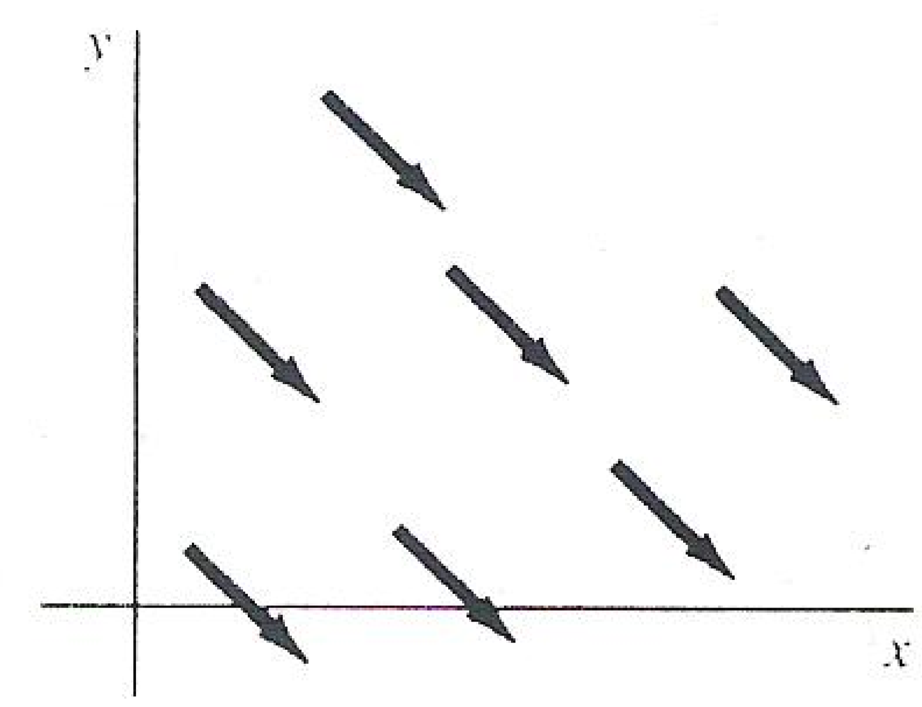


Figura 3-4 Vetores iguais têm o mesmo módulo e a mesma direção. Todos os vetores nesta figura são iguais.

Questões

1. O deslocamento de uma partícula pode ter uma grandeza que seja menor que a grandeza da distância percorrida pela partícula sobre a sua trajetória? Pode ter uma grandeza maior que a grandeza da distância percorrida? Explique.
2. Dê um exemplo no qual a distância percorrida seja significativa embora o deslocamento correspondente seja zero.

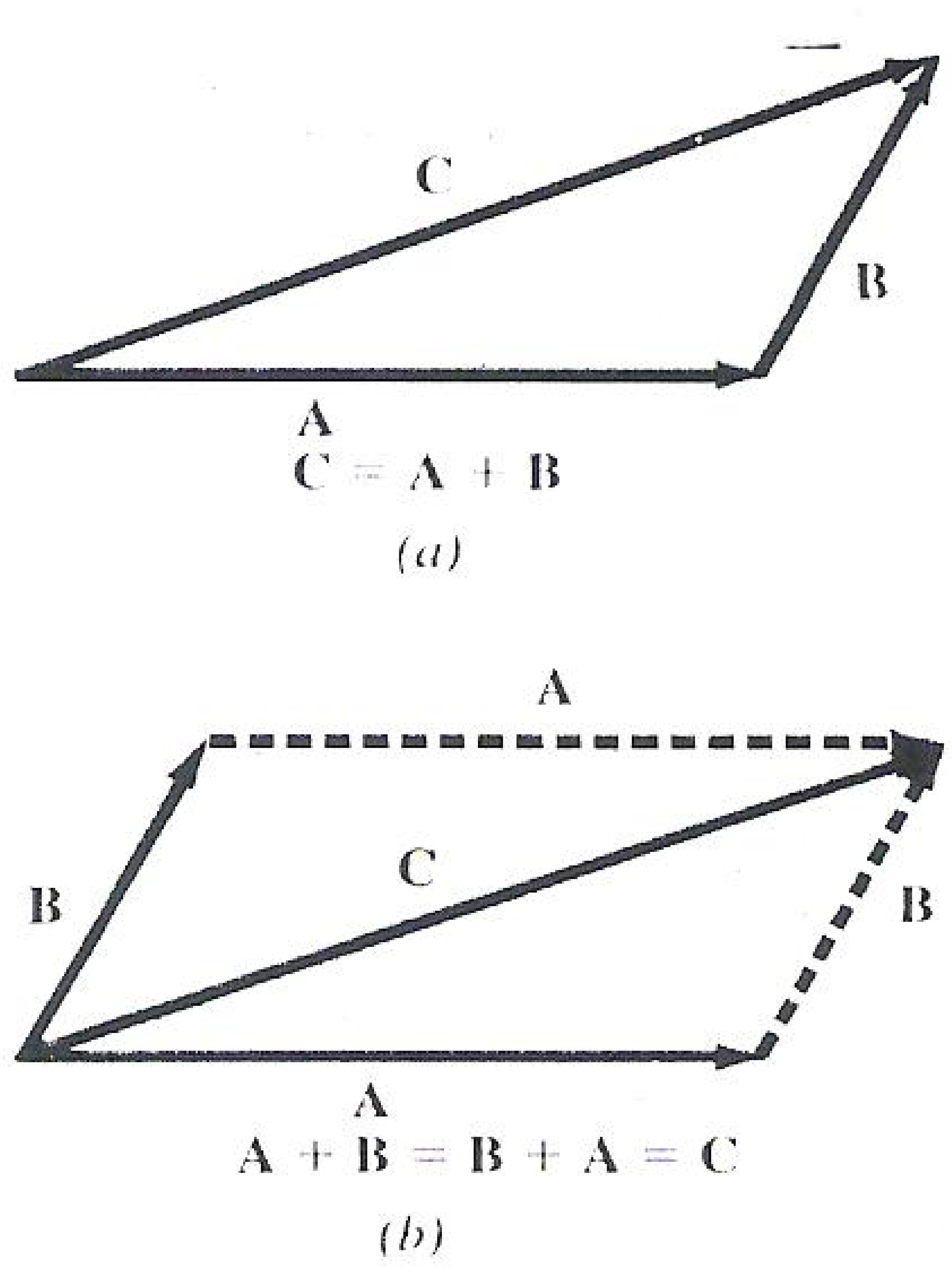


Figura 3-5 (*a*) Os vetores **A** + **B** = **C.** Em (*b*) o vetor **B** foi deslocado paralelamente a si mesmo, de modo que **A** e **B** ficaram com a mesma origem. O vetor resultante **C** = **A** + **B** está sobre a diagonal do paralelogramo formado quando **A** e **B** estão com as origens coincidentes. Vemos, por esta figura, que a ordem da adição é indiferente, isto é, que **A** + **B** é igual a **B** + **A.**

3

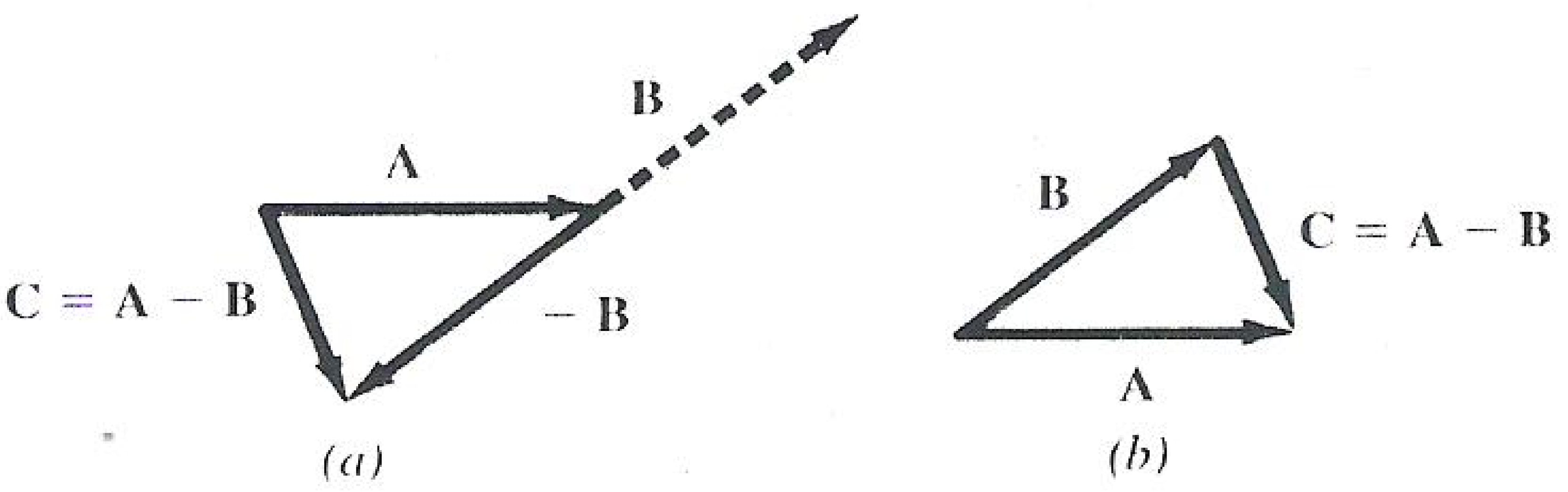


Figura 3-6 Subtração de vetores. (*a*) Neste gráfico, **C** = **A** − **B** é determinado pela adição de −**B** a **A**. (*b*) Um método alternativo de calcular **A** − **B** é achar o vetor **C** que somado a **B** dá o vetor **A**.

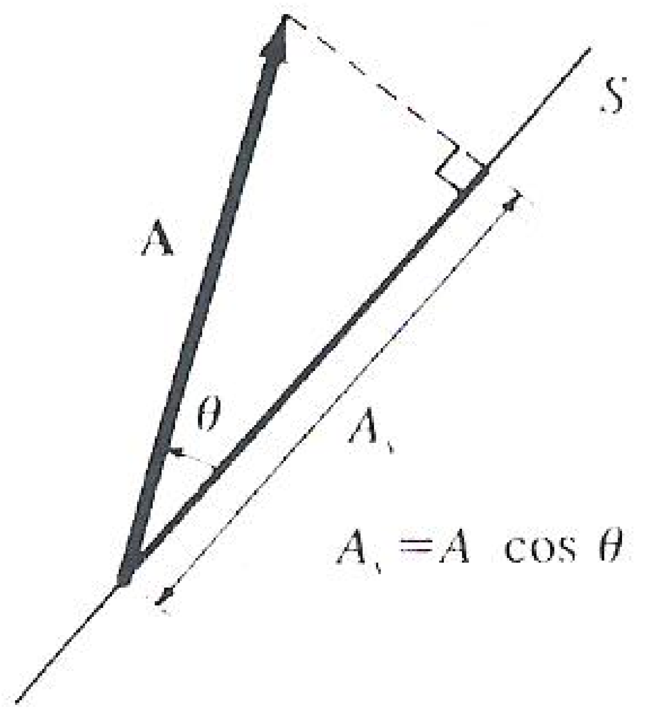


Figura 3-7 A componente A_s do vetor **A**, na direção de uma reta no espaço, se encontra pela projeção do vetor sobre a reta.

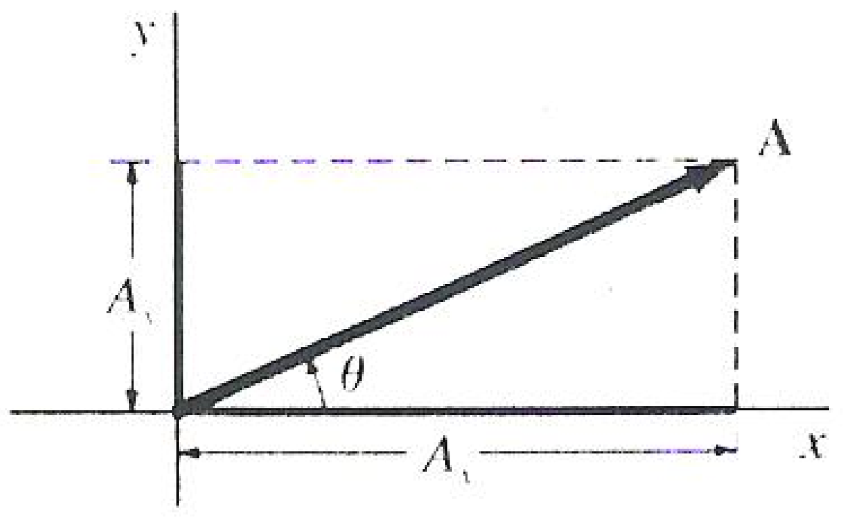


Figura 3-8 As componentes cartesianas de um vetor **A** estão relacionadas ao módulo A e ao ângulo θ pelas fórmulas $A_x = A\cos\theta$ e $A_y = A \operatorname{sen}\theta$.

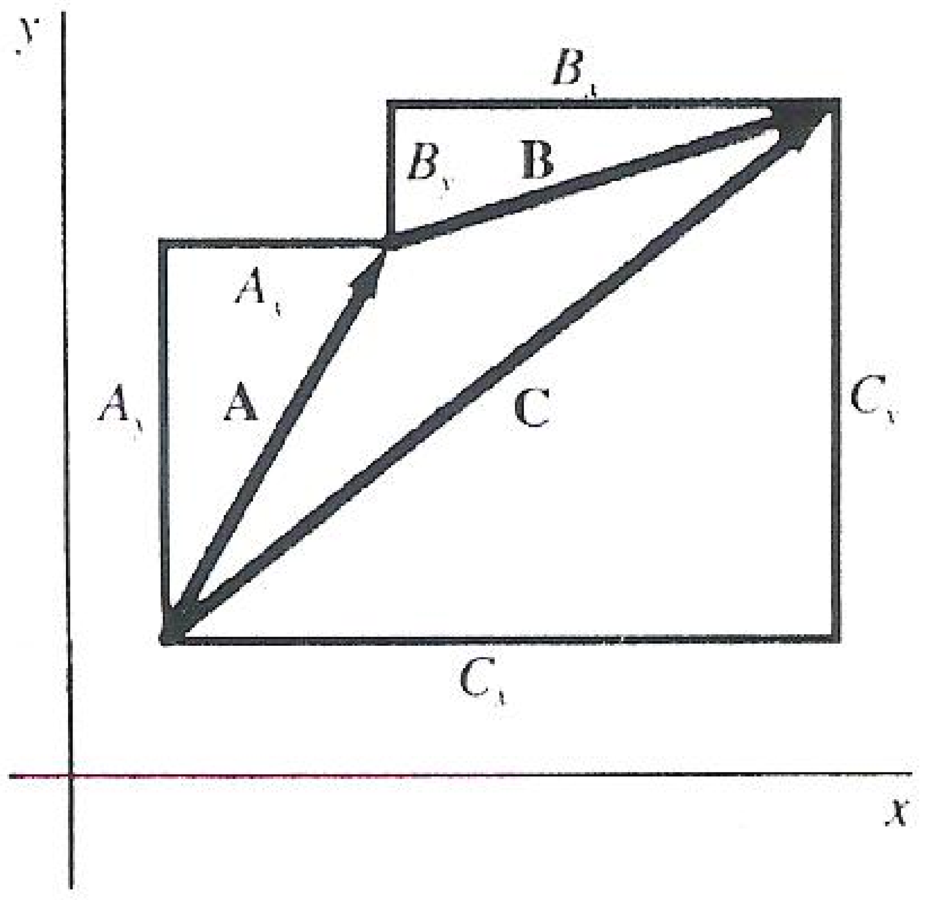


Figura 3-9 Componentes x e y dos vetores **A**, **B** e **C** = **A** + **B**. Vemos, pela figura, que $C_x = A_x + B_x$ e $C_y = A_y + B_y$.

3.2 Adição de Vetores Mediante as Componentes

Podemos somar ou subtrair analiticamente vetores mediante a decomposição de cada um deles nas respectivas componentes. A componente de um vetor numa certa direção é a projeção do vetor sobre uma reta que suporta esta direção, e que se obtém baixando-se uma perpendicular da ponta do vetor à reta, conforme está na Figura 3-7. Exemplo importante é o da projeção de um vetor sobre um eixo de um sistema cartesiano ortogonal. Esta projeção é uma **componente cartesiana** do vetor. A Figura 3-8 mostra um vetor **A** no plano xy. As suas componentes cartesianas são A_x e A_y. Em geral, as componentes podem ser ou positivas ou negativas. Por exemplo, se o vetor **A** apontar na direção negativa dos x, A_x será negativa. Se θ for o ângulo entre o vetor **A** e o eixo dos x, vemos pela figura que

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \qquad \text{3-2}a$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{A_y}{A} \qquad \text{3-2}b$$

$$\cos\theta = \frac{A_x}{A} \qquad \text{3-2}c$$

onde A é o módulo de **A**. Podemos, portanto, determinar analiticamente as componentes de **A** por intermédio do módulo A e do ângulo θ, com as fórmulas

$$A_x = A\cos\theta \qquad \text{3-3}$$

e

$$A_y = A\operatorname{sen}\theta \qquad \text{3-4}$$

Inversamente, se conhecermos as componentes A_x e A_y, podemos achar o ângulo θ pela Eq. 3.2*a* e o módulo A pelo teorema de Pitágoras:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad \text{3-5}$$

A Figura 3-9 ilustra o uso das componentes na adição de dois vetores **A** e **B** que estão no plano xy. Aparecem na figura as componentes cartesianas de cada vetor e da respectiva soma **C** = **A** + **B**. Podemos ver na figura que **C** = **A** + **B** acarreta

$$C_x = A_x + B_x \qquad \text{3-6}a$$

e também

$$C_y = A_y + B_y \qquad \text{3-6}b$$

4

Exercício

Um carro percorre 20 km numa direção que faz um ângulo de 30° ao norte do oeste. Admitindo que o eixo dos x se oriente de oeste para leste e que o dos y do sul para o norte, como na Figura 3-10, achar as componentes x e y do vetor deslocamento do carro. (Respostas: $A_x = -17{,}3$ km, $A_y = +10$ km)

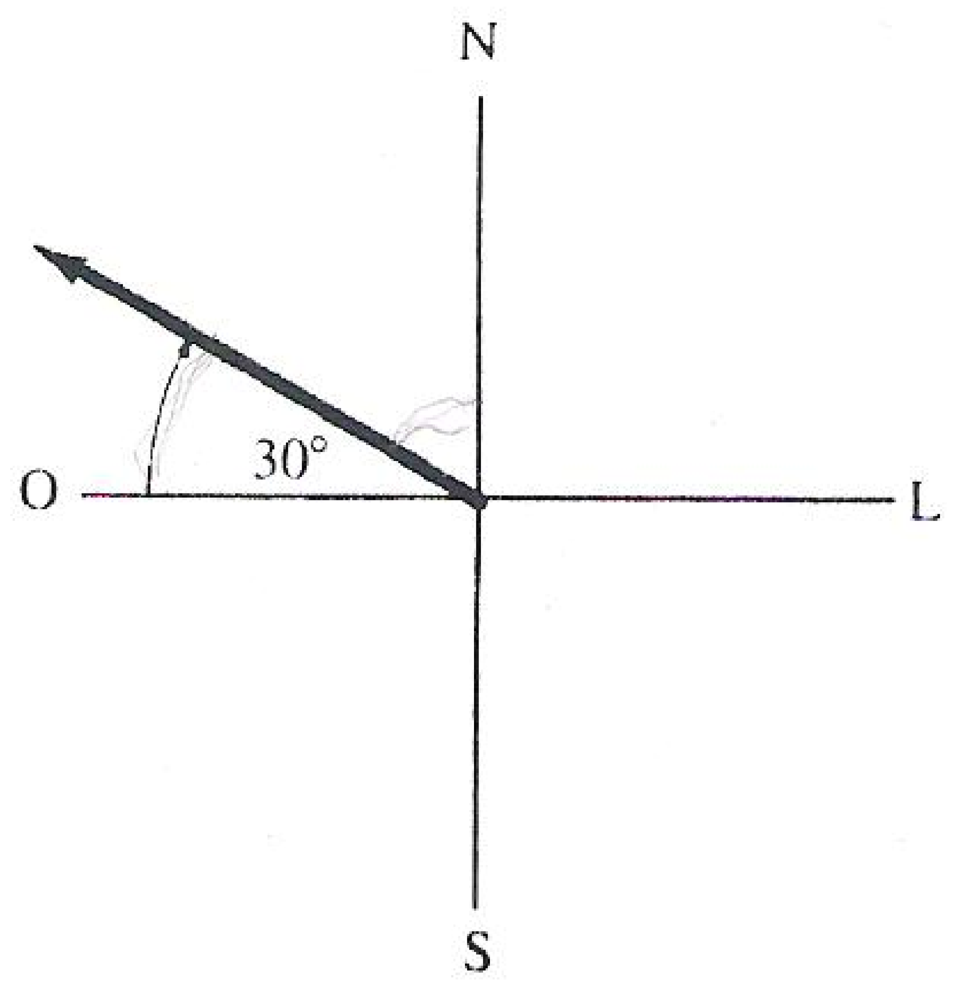


Figura 3-10 Geometria do exercício proposto.

Exemplo 3.3

Resolver o Exemplo 3.2 mediante as componentes vetoriais.

Neste exemplo, a pessoa andou, inicialmente, 3 km na direção leste. Se **A** for o seu deslocamento, e se tomarmos o eixo na direção leste, as componentes de **A** são

$$A_x = 3 \text{ km}$$

e

$$A_y = 0$$

Depois, a pessoa andou 4 km fazendo um ângulo de 60° com a direção leste, para o norte. O vetor **B** que representa este deslocamento tem as componentes

$$B_x = (4 \text{ km}) \cos 60^\circ = (4 \text{ km})(0{,}5) = 2 \text{ km}$$

e

$$B_y = (4 \text{ km}) \operatorname{sen} 60^\circ = (4 \text{ km})(0{,}866) = 3{,}46 \text{ km}$$

As componentes do deslocamento resultante são, portanto,

$$C_x = A_x + B_x = 3 \text{ km} + 2 \text{ km} = 5 \text{ km}$$

e

$$C_y = A_y + B_y = 0 + 3{,}46 \text{ km} = 3{,}46 \text{ km}$$

Obteremos o módulo do deslocamento resultante **C** mediante o teorema de Pitágoras:

$$C^2 = C_x^2 + C_y^2 = (5 \text{ km})^2 + (3{,}46 \text{ km})^2 = 37{,}0 \text{ km}^2$$

De modo que

$$C = \sqrt{37{,}0 \text{ km}^2} = 6{,}1 \text{ km}$$

O ângulo entre **C** e o eixo dos x se acha por

$$\tan\theta = \frac{C_y}{C_x} = \frac{3{,}46 \text{ km}}{5 \text{ km}} = 0{,}692$$

O ângulo θ é

$$\theta = \tan^{-1} 0{,}692 = 34{,}7^\circ$$

Os resultados concordam com os do Exemplo 3.2, dentro da exatidão das medições feitas naquele exemplo.

3.3 Vetores Unitários e Multiplicação de Vetores por Escalares

Um vetor **A** pode ser multiplicado por um escalar s. O resultado é o vetor $\mathbf{B} = s\mathbf{A}$, que aponta na direção de **A** e tem o módulo sA. As dimensões de **B** são as dimensões de s multiplicadas pelas dimensões de **A**.

5

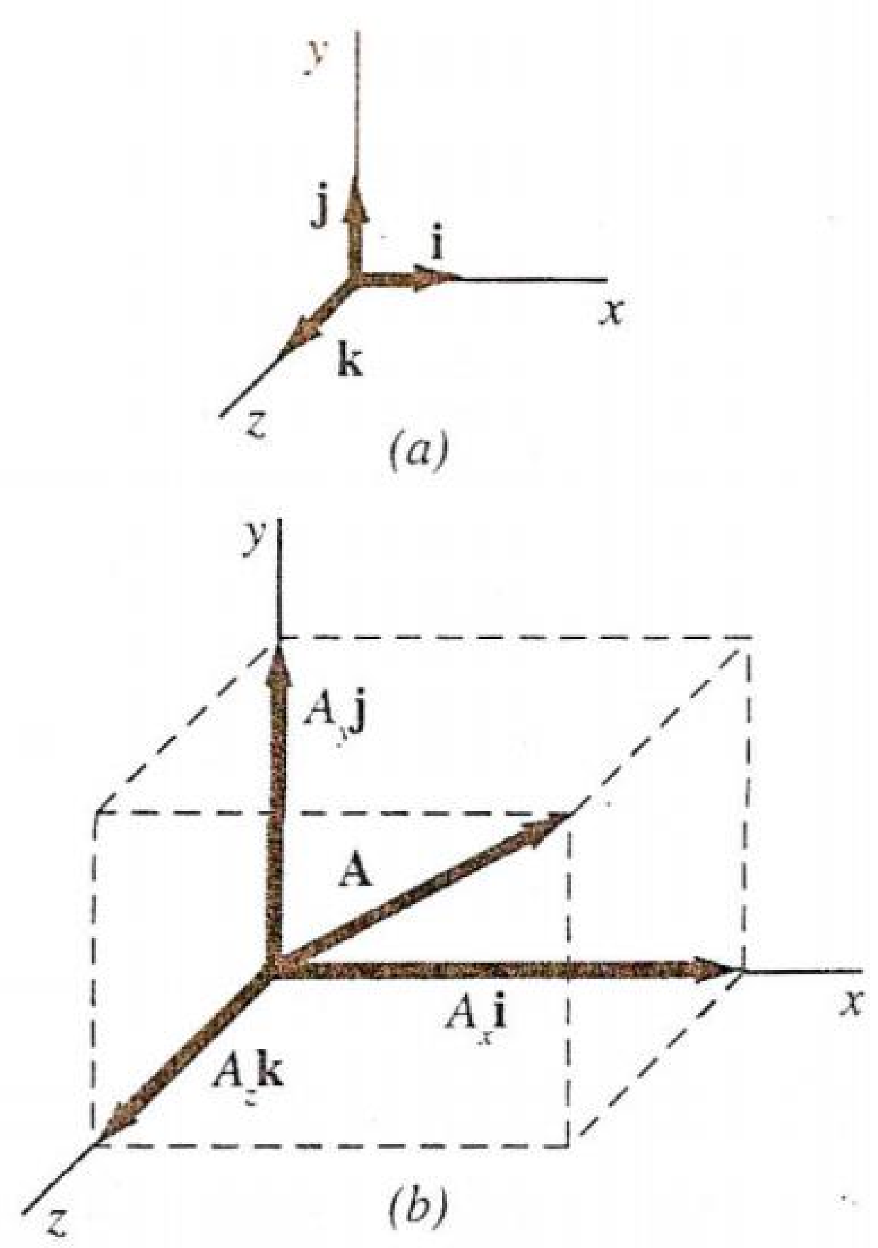


Figura 3-11 (*a*) Os vetores unitários **i, j** e **k** de um sistema cartesiano ortogonal. (*b*) O vetor **A** pode ser escrito em termos dos vetores unitários como $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$.

Podemos exprimir convenientemente um vetor em termos das suas componentes por intermédio dos vetores unitários. Um **vetor unitário** é um vetor adimensional que tem o módulo igual a 1 e aponta numa certa direção. Por exemplo, sejam **i, j** e **k** os vetores unitários nas direções positivas dos eixos cartesianos **x, y** e **z**, respectivamente. O vetor $A_x\mathbf{i}$ é o produto da componente A_x pelo vetor unitário **i.** É um vetor que é paralelo ao eixo dos x (ou antiparalelo se A_x for negativo) e tem o módulo $|A_x|$. Um vetor **A** qualquer pode então ser escrito como a soma de três vetores, cada um deles paralelo a um eixo de coordenadas:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \qquad 3\text{-}7$$

A soma vetorial da Eq. 3-7 está ilustrada na Figura 3-11. A adição de dois vetores **A** e **B** pode ser escrita em termos dos vetores unitários como

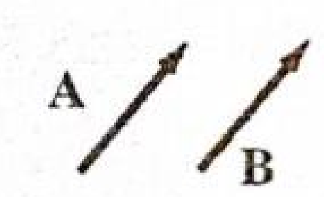
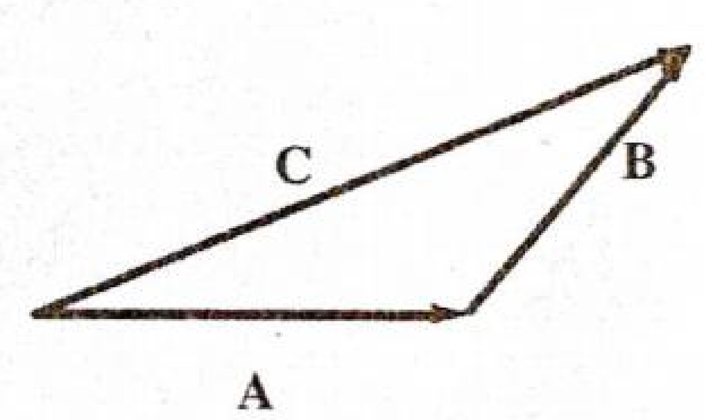
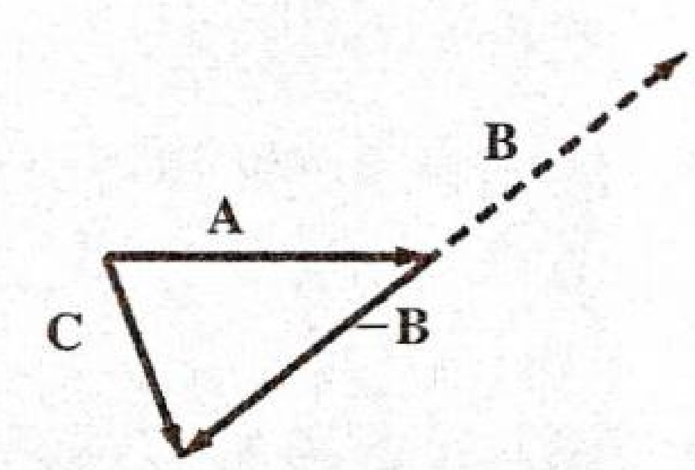
$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) + (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}\end{aligned} \qquad 3\text{-}8$$

Exercício

Dados os dois vetores $\mathbf{A} = (4\text{ m})\mathbf{i} + (3\text{ m})\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = (2\text{ m})\mathbf{i} - (3\text{ m})\mathbf{j}$, calcular (*a*) A, (*b*) B, (*c*) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ e (*d*) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$. [Respostas: (*a*) $A = 5$ m, (*b*) $B = 3{,}61$ m, (*c*) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (6\text{ m})\mathbf{i}$, (*d*) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = (2\text{ m})\mathbf{i} + (6\text{ m})\mathbf{j}$]

As propriedades gerais dos vetores que foram discutidas até agora estão resumidas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 **Propriedades dos Vetores**

Propriedade	Explicação	Figura	Representação nas componentes
Igualdade	$\mathbf{A} = \mathbf{B}$ se $\lvert\mathbf{A}\rvert = \lvert\mathbf{B}\rvert$ e as direções forem coincidentes		$A_x = B_x$ $A_y = B_y$ $A_z = B_z$
Adição	$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$		$C_x = Ax + Bx$ $C_y = A_y + B_y$ $C_z = A_z + B_z$
Negativo de um vetor	$\mathbf{A} = -\mathbf{B}$ se $\lvert\mathbf{B}\rvert = \lvert\mathbf{A}\rvert$ e as direções forem opostas		$A_x = -B_x$ $A_y = -B_y$ $A_z = -B_z$
Subtração	$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$		$C_x = A_x - B_x$ $C_y = A_y - B_y$ $C_z = A_z - B_z$
Multiplicação por um escalar positivo	$\mathbf{B} = s\mathbf{A}$ se $\lvert\mathbf{B}\rvert = s\lvert\mathbf{A}\rvert$ e a direção de **B** for coincidente com a de **A**		$B_x = sA_x$ $B_y = sA_y$ $B_z = sA_z$

6

Questões

3. Como se poderia subtrair dois vetores mediante o método das componentes?
4. A componente de um vetor pode ter um módulo maior que o módulo do vetor? Em que circunstâncias a componente de um vetor tem um módulo igual ao módulo do vetor?
5. Um vetor pode ser igual a zero e ter uma, ou mais, componentes, não nula?
6. As componentes de $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ são necessariamente maiores que as componentes correspondentes de $\mathbf{A}$ ou de $\mathbf{B}$?

3.4 O Vetor Velocidade

Suponhamos que você esteja dirigindo um carro a 50 km/h conforme a indicação do velocímetro, na direção sul, indicada por uma bússola. O velocímetro dá o módulo da velocidade, e a bússola a direção da velocidade. O vetor velocidade instantânea é um vetor que aponta na direção do movimento e tem o módulo igual ao que se denomina trivialmente velocidade do carro. É igual à taxa de variação do vetor deslocamento.

A Figura 3-12 mostra uma partícula que se desloca ao longo de uma curva no espaço. (A curva constitui a trajetória realmente seguida pela partícula. Não pode ser confundida com a curva de x em função de t, que vimos no capítulo anterior.) Definimos a posição de uma partícula mediante o seu vetor deslocamento, tendo a origem em O. Este vetor deslocamento é denominado o **vetor posição r.** Se a partícula estiver num ponto (x,y), o vetor posição é

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \qquad 3\text{-}9$$

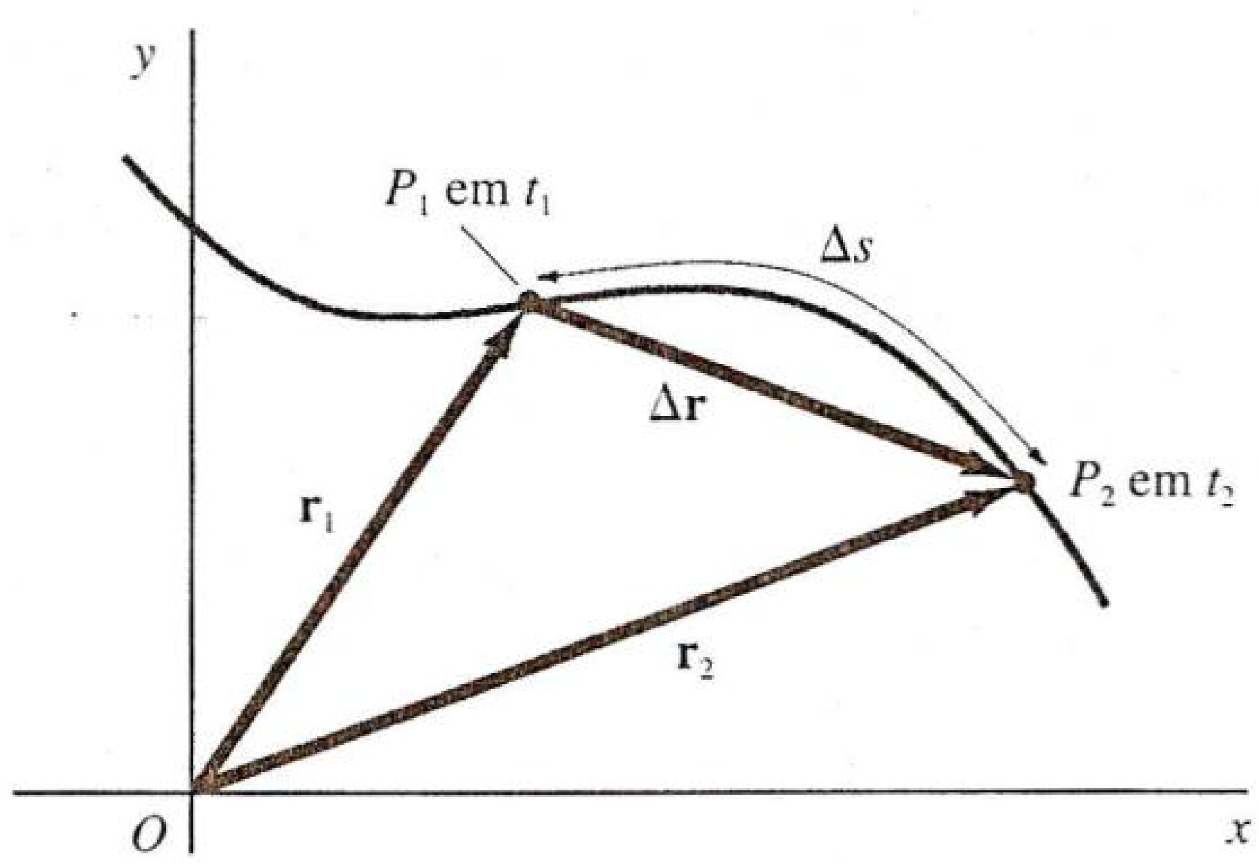


Figura 3-12 Partícula que se desloca sobre uma curva arbitrária no espaço, com os vetores posição $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ em dois instantes diferentes t_1 e t_2. O vetor deslocamento $\Delta\mathbf{r}$ é a diferença entre os dois vetores posição, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Num certo instante t_1, a partícula está no ponto P_1. Este ponto fica localizado pelo vetor posição $\mathbf{r}_1$ que vai da origem até P_1. Num instante posterior t_2, a partícula está no ponto P_2 e o seu vetor posição é $\mathbf{r}_2$. O vetor deslocamento é a variação do vetor posição:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \qquad 3\text{-}10$$

(Esta definição é análoga à definição no caso unidimensional, do Capítulo 2, quando o deslocamento era a variação da coordenada de posição x.) O novo vetor posição $\mathbf{r}_2$ é igual à soma do vetor posição inicial $\mathbf{r}_1$ com o vetor deslocamento $\Delta\mathbf{r}$, conforme aparece na figura. A razão entre o vetor deslocamento e o intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é o **vetor velocidade média:**

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \qquad 3\text{-}11$$

Definição do vetor velocidade média

7

Observamos, pela Figura 3-12, que o módulo do vetor deslocamento não é igual à distância realmente percorrida pela partícula, Δs, medida sobre a trajetória. Na realidade, é menor que esta distância (a menos que a partícula percorra uma reta ao passar do ponto P_1 para P_2). No entanto, se considerarmos intervalos de tempo cada vez menores, conforme a indicação da Figura 3-13, o valor do deslocamento se aproxima da distância real percorrida pela partícula

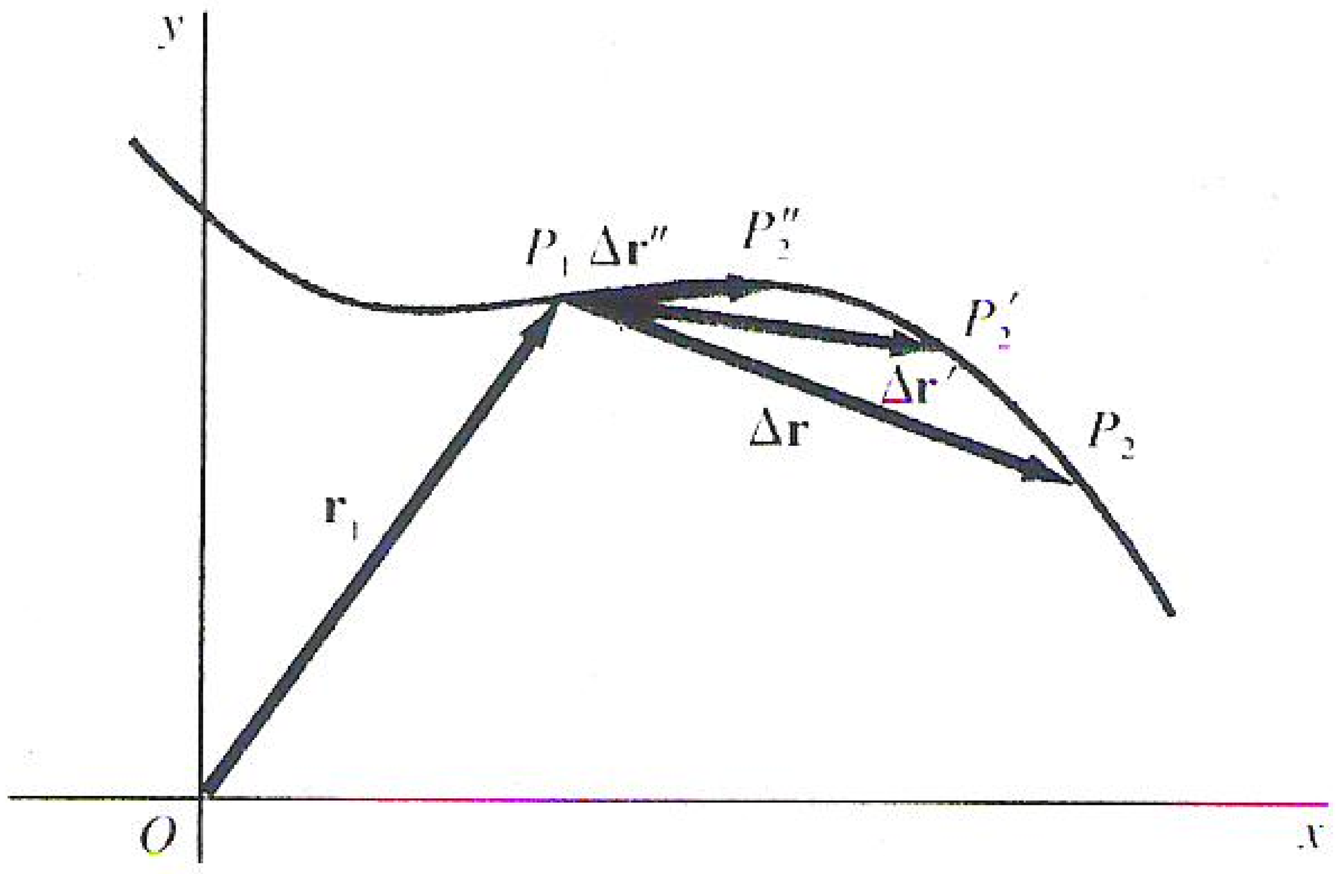


Figura 3-13 À medida que se consideram intervalos de tempo cada vez menores, o valor do vetor deslocamento se aproxima da distância real percorrida sobre a trajetória, e a direção do vetor deslocamento se aproxima da direção da reta que é tangente à trajetória no ponto P_1.

sobre a trajetória, e a direção de $\Delta\mathbf{r}$ se aproxima da direção da reta tangente à trajetória no ponto P_1. O **vetor velocidade instantânea** é o limite do vetor velocidade média quando o intervalo de tempo Δt se aproxima de zero:

Definição do vetor velocidade instantânea

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad 3\text{-}12$$

O vetor velocidade instantânea é então a derivada do vetor posição em relação ao tempo. A sua direção é a da reta tangente à curva percorrida pela partícula no espaço. Este vetor, portanto, aponta na direção do movimento da partícula. O módulo da velocidade instantânea é o que se chama trivialmente velocidade ds/dt, onde s é a distância percorrida sobre a trajetória.

A fim de calcular a derivada na Eq. 3-12, devemos exprimir o vetor posição em termos das suas componentes, como na Eq. 3-9:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x\ \mathbf{i} + \Delta y\ \mathbf{j}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x\ \mathbf{i}}{\Delta t}\right) + \left(\frac{\Delta y\ \mathbf{j}}{\Delta t}\right)$$

ou

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\ \mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\ \mathbf{j}$$

Exemplo 3.4

Um veleiro tem as coordenadas iniciais $(x_1, y_1) = (100\ \text{m}, 200\ \text{m})$. Dois minutos depois, as suas coordenadas são $(x_2, y_2) = (120\ \text{m}, 210\ \text{m})$. Quais as componentes, o módulo e a direção da velocidade média neste intervalo de 2,00 min?

$$v_{x,m} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} = \frac{120 - 100\ \text{m}}{2{,}00\ \text{min}} = 10{,}0\ \text{m/min}$$

$$v_{y,\mathrm{m}} = \frac{y_2 - y_1}{\Delta t} = \frac{210 - 200 \text{ m}}{2{,}00 \text{ min}} = 5{,}0 \text{ m/min}$$

$$v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\left(v_{x,\mathrm{m}}\right)^2 + \left(v_{y,\mathrm{m}}\right)^2} = \sqrt{10{,}0^2 + 5{,}0^2} = \sqrt{125} = 11{,}2 \text{ m/min}$$

$$\tan\theta = \frac{v_{y,\mathrm{m}}}{v_{x,\mathrm{m}}} = \frac{5{,}0 \text{ m/min}}{10{,}0 \text{ m/min}} = 0{,}500$$

$$\theta = \tan^{-1} 0{,}500 = 26{,}6°$$

3.5 O Vetor Aceleração

O **vetor aceleração média** é definido como a razão entre a variação do vetor velocidade instantânea $\Delta\mathbf{v}$ e o intervalo de tempo Δt:

$$\mathbf{a}_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \quad \text{3-13}$$

Definição do vetor aceleração média

O **vetor aceleração instantânea** é o limite desta razão quando o intervalo de tempo tende a zero. Isto é, o vetor aceleração instantânea é a derivada do vetor velocidade em relação ao tempo:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \text{3-14}$$

Definição do vetor aceleração instantânea

A fim de calcular a aceleração instantânea, exprimimos $\mathbf{v}$ em termos das suas componentes cartesianas:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j}$$

Então

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\,\mathbf{j} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\mathbf{j}$$

É especialmente importante observar que o vetor velocidade pode variar em módulo, em direção ou em ambos. Se o vetor velocidade varia, de qualquer forma, a partícula está acelerada. Estamos mais habituados com uma aceleração na qual a velocidade varia em módulo, isto é, uma aceleração com a qual se altera o valor da velocidade. No entanto, uma partícula pode estar em movimento com velocidade de módulo constante (valor constante) e ainda assim estar acelerada, se a direção do vetor velocidade estiver se alterando. Um caso especialmente importante desta situação é o do movimento circular, que será discutido na Seção 3-8. Este tipo de aceleração é tão real quanto aquele que provoca modificação do valor da velocidade.

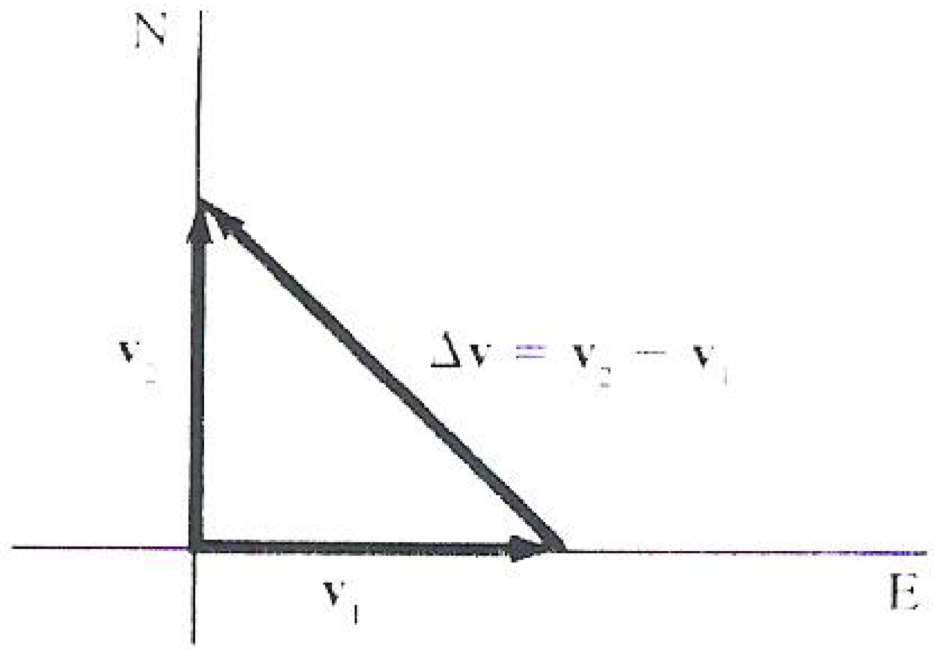


Figura 3-14 Vetores velocidade do Exemplo 3.5.

Exemplo 3.5

Um carro está indo a 60 km/h para leste. Entra numa curva e, 5 s depois, está correndo para o norte, a 60 km/h. Achar a aceleração média do carro.

A Figura 3-14 mostra os vetores velocidade inicial e final $\mathbf{v}_1 := 60$ km/h **i** e $\mathbf{v}_2 =$ 60 km/h **j**. A variação de velocidade é

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = 60 \text{ km/h } \mathbf{j} - 60 \text{ km/h } \mathbf{i}$$

que também aparece na figura. (Observe que desenhamos a figura de modo que $\mathbf{v}_1 + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$.) A aceleração média é dada por

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{60 \text{ km/h } \mathbf{j} - 60 \text{ km/h } \mathbf{i}}{5 \text{ s}}$$

$$= 12 \text{ km/h}\cdot\text{s}\,\mathbf{j} - 12 \text{ km/h}\cdot\text{s}\,\mathbf{i}$$

O módulo da aceleração média é

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-12 \text{ km/h}\cdot\text{s})^2 + (12 \text{ km/h}\cdot\text{s})^2} = 17{,}0 \text{ km/h}\cdot\text{s}$$

Observe, neste exemplo, que o carro sofre aceleração embora o módulo da sua velocidade permaneça constante.

Questões

7. No movimento arbitrário de dada partícula, a direção do vetor velocidade tem uma certa relação especial com a direção do vetor posição?
8. Dê exemplos nos quais as direções dos vetores velocidade e posição sejam (*a*) opostas, (*b*) coincidentes e (*c*) mutuamente perpendiculares.
9. Como é possível que uma partícula que se desloca com velocidade que tem o módulo constante esteja acelerada? Uma partícula pode ter a velocidade constante e ao mesmo tempo estar acelerada?
10. É possível que um carro faça uma curva sem acelerar?
11. O vetor velocidade pode mudar de direção sem mudar de módulo? Se pode, dê um exemplo.

3.6 Velocidade Relativa

A velocidade de um corpo, algumas vezes, é medida em relação a um sistema de coordenadas que, por sua vez, está em movimento num outro sistema de coordenadas. Por exemplo, imaginemos que uma pessoa esteja caminhando sobre a plataforma de um carro ferroviário com uma velocidade $\mathbf{v}_{pc}$ em relação ao carro, enquanto este se move com a velocidade $\mathbf{v}_{cs}$ em relação ao solo, conforme está na Figura 3-15. A velocidade da pessoa em relação ao solo $\mathbf{v}_{ps}$ é igual à soma das duas velocidades:

Velocidade relativa

$$\mathbf{v}_{ps} = \mathbf{v}_{pc} + \mathbf{v}_{cs}$$

A adição das velocidades relativas é feita da mesma forma que a adição de deslocamentos — graficamente, colocando-se a origem de um vetor na extremidade do outro, ou analiticamente, mediante as componentes vetoriais.

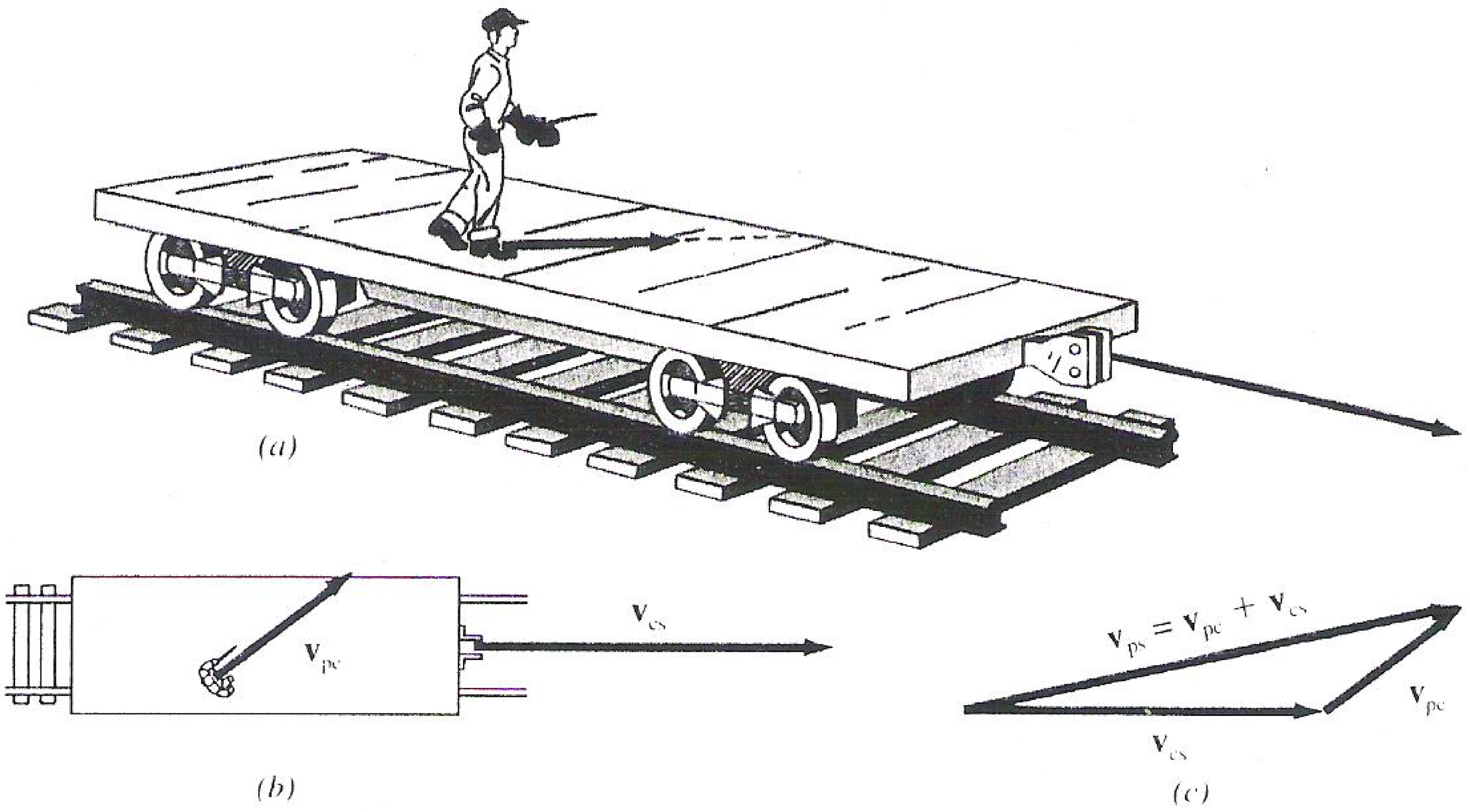


Figura 3-15 (*a*) Em relação ao carro ferroviário, a pessoa tem a velocidade $\mathbf{v}_{pc}$. (*b*) A velocidade do carro em relação ao solo é $\mathbf{v}_{cs}$. (c) Em relação ao solo, a velocidade da pessoa é $\mathbf{v}_{ps} = \mathbf{v}_{pc} + \mathbf{v}_{cs}$, onde $\mathbf{v}_{cs}$ é a velocidade do carro em relação ao solo.

Exemplo 3.6

Um rio corre de oeste para leste com a velocidade escalar de 3 m/s. Um garoto nada para o norte, transversalmente à corrente, com uma velocidade escalar de 2 m/s em relação à água. Qual a velocidade do garoto em relação às margens?

A Figura 3-16 mostra os vetores velocidade deste problema. A velocidade do garoto em relação às margens é igual à soma vetorial da velocidade do garoto em relação à água $\mathbf{v}_{ga}$ e a velocidade da água relativa às margens $\mathbf{v}_{am}$, conforme mostra a figura. O módulo desta velocidade é

$$v = \sqrt{v_{ga}^2 + v_{am}^2} = \sqrt{(2\ \text{m/s})^2 + (3\ \text{m/s})^2}$$

$$= \sqrt{13\ \text{m}^2/s^2} = 3{,}61\ \text{m/s}$$

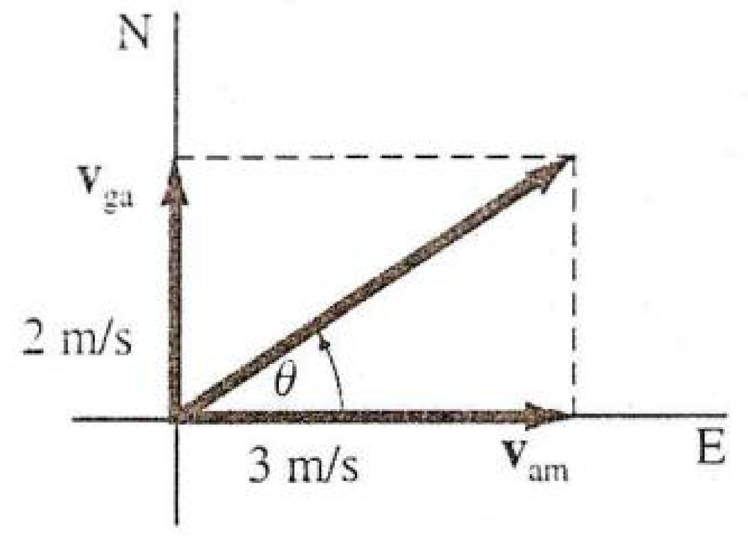


Figura 3.16 Os vetores velocidade do Exemplo 3.6.

A direção é dada pelo ângulo θ com as margens:

$$\tan\theta = \frac{v_{ga}}{v_{am}} = \frac{2\ \text{m/s}}{3\ \text{m/s}} = 0{,}667$$

$$\theta = \tan^{-1} 0{,}667 = 33{,}7^\circ$$

3.7 Movimento dos Projéteis

Interessante aplicação do movimento bidimensional é a de um projétil, isto é, de um corpo que é lançado no ar e depois move-se livremente sob a ação da gravidade. O movimento de um projétil real é complicado pela resistência do ar, pela rotação da terra e pelas variações da aceleração devidas à gravidade. Para ter simplicidade, vamos desprezar estas complicações. O projétil, então, tem uma aceleração constante, dirigida verticalmente para baixo, com