# Ernö Rubik

| | |
|---|---|
| 1944 | Nasce Ernö Rubik em Budapest, Hungria. |
| 1967 | Obtém o título de Arquiteto. |
| 1970 | Obtém o título de Designer e se torna professor. |
| 1974 | Inventa o Cubo para ilustrar o conceito de simetria (um conceito precursor da Teoria de Grupos). |
| 1980 | Inicia a produção industrial e a distribuição mundial do Cubo. 100 milhões de cubos são vendidos em apenas dois anos. |

# Evariste Galois (1811-1832)

Quando ainda era um adolescente, ele inventou a *Teoria de Grupos* para responder a seguinte questão:

# Evariste Galois (1811-1832)

Quando ainda era um adolescente, ele inventou a *Teoria de Grupos* para responder a seguinte questão:

**Pergunta 1** *Quando é que uma equação geral da forma*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

*pode ser resolvida usando-se apenas as operações usuais da aritmética juntamente com a radiciação?*

# Evariste Galois (1811-1832)

Quando ainda era um adolescente, ele inventou a *Teoria de Grupos* para responder a seguinte questão:

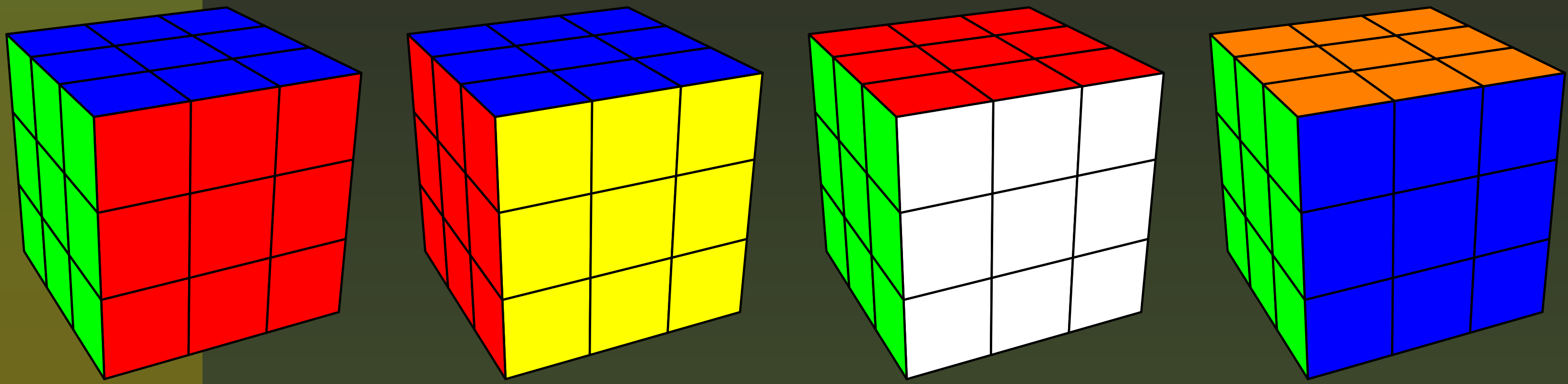
**Pergunta 1** *Quando é que uma equação geral da forma*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

*pode ser resolvida usando-se apenas as operações usuais da aritmética juntamente com a radiciação?*

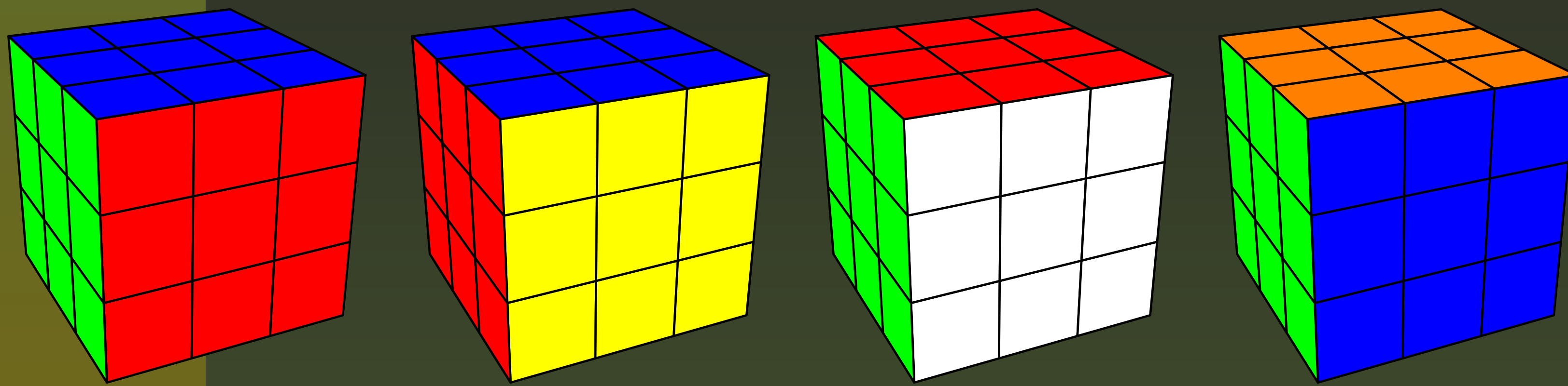
A resposta definitiva encontrada por Galois é: apenas quando $n \leq 4$.

# Apresentando o Cubo



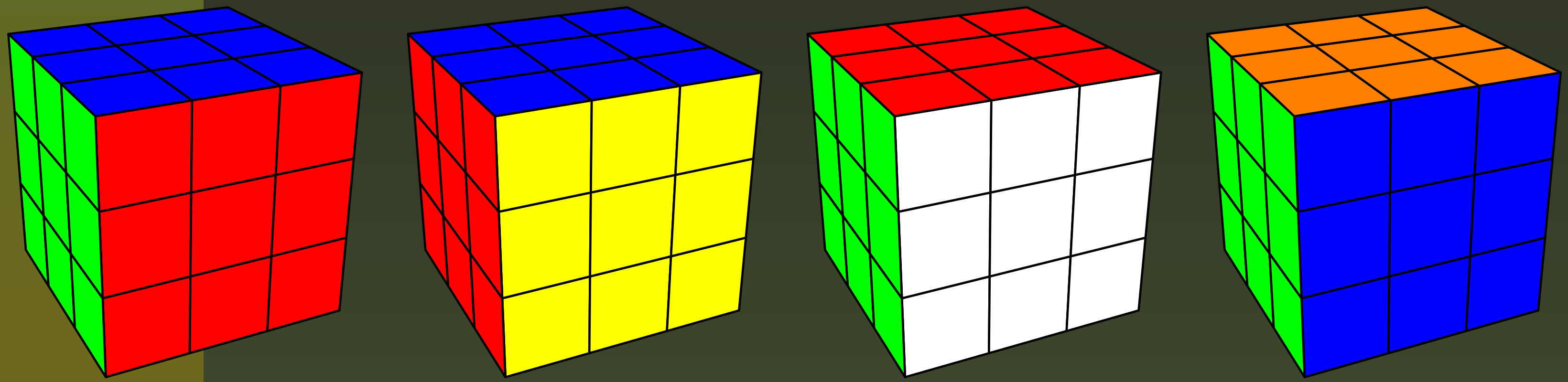
- O Cubo tem 6 faces de cores distintas.

# Apresentando o Cubo



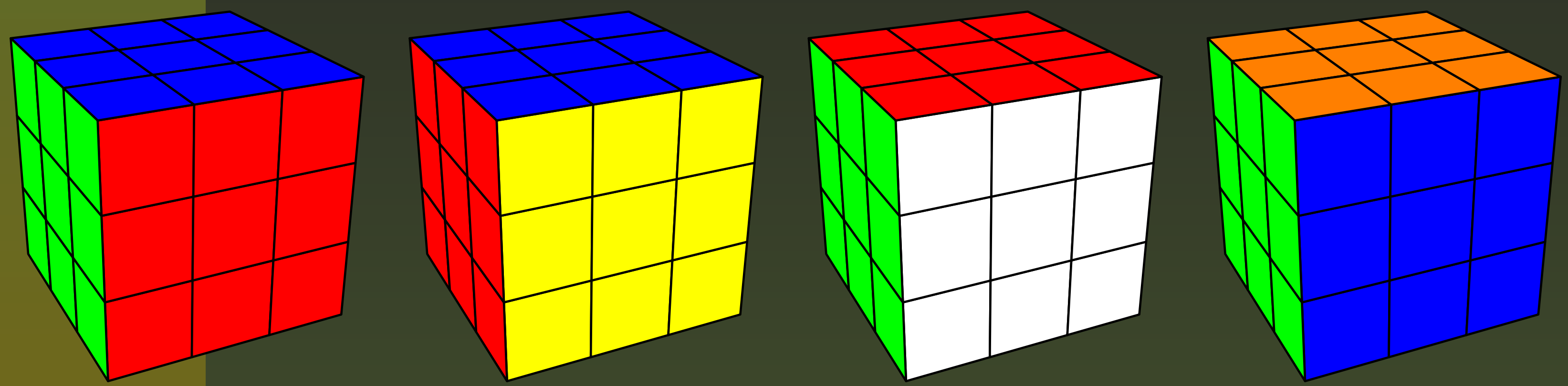
- O Cubo tem 6 faces de cores distintas.
- É formado por 27 cubinhos (1 é virtual pois está no centro do Cubo!), sendo 9 em cada face.

# Apresentando o Cubo



- O Cubo tem 6 faces de cores distintas.
- É formado por 27 cubinhos (1 é virtual pois está no centro do Cubo!), sendo 9 em cada face.
- Cada cubinho tem 6 facetas, mas só são visíveis as que apontam para fora do Cubo.

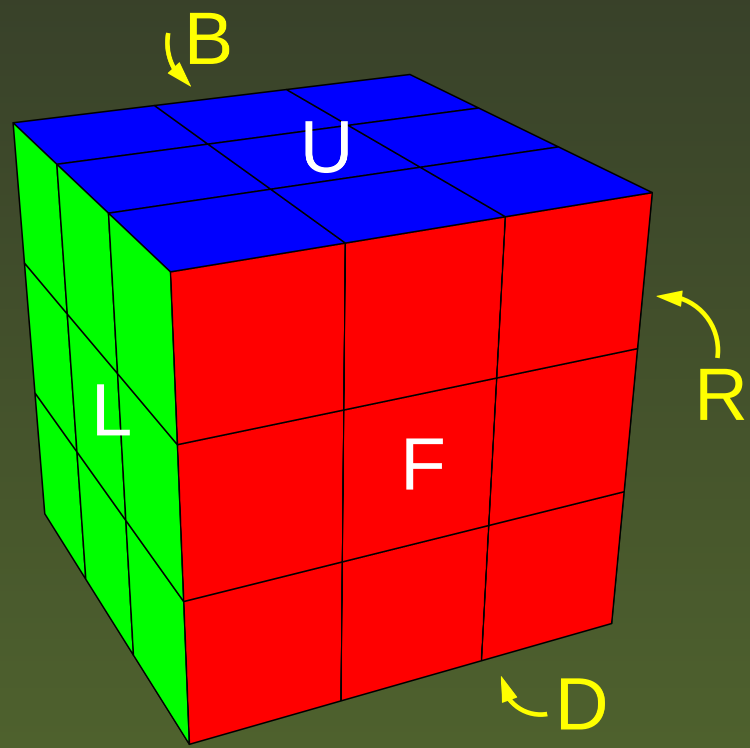
# Apresentando o Cubo



- O Cubo tem 6 faces de cores distintas.
- É formado por 27 cubinhos (1 é virtual pois está no centro do Cubo!), sendo 9 em cada face.
- Cada cubinho tem 6 facetas, mas só são visíveis as que apontam para fora do Cubo.
- Há três tipos de cubinhos: *centrais*, de *arestas* e de *cantos*.

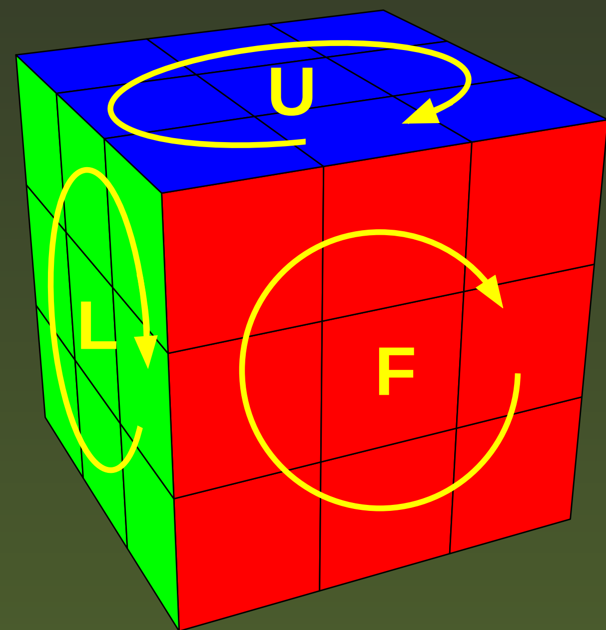
# As faces do Cubo

É usual indicar as faces do Cubo pela primeira letra de seus respectivos nomes em inglês: *Front*, *Back*, *Upper*, *Down*, *Left e Right*



# Os movimentos do Cubo

Cada face pode ser girada de um quarto de volta ou de meia volta, tanto no sentido horário quanto no anti-horário.

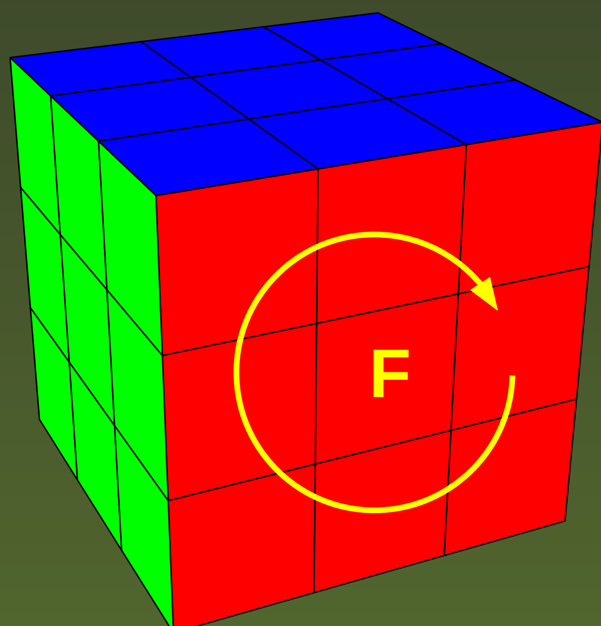



Costuma-se indicar os respetcivos movimentos de um quarto de volta em sentido horário por $F$, $B$, $U$, $D$, $L$ e $R$.

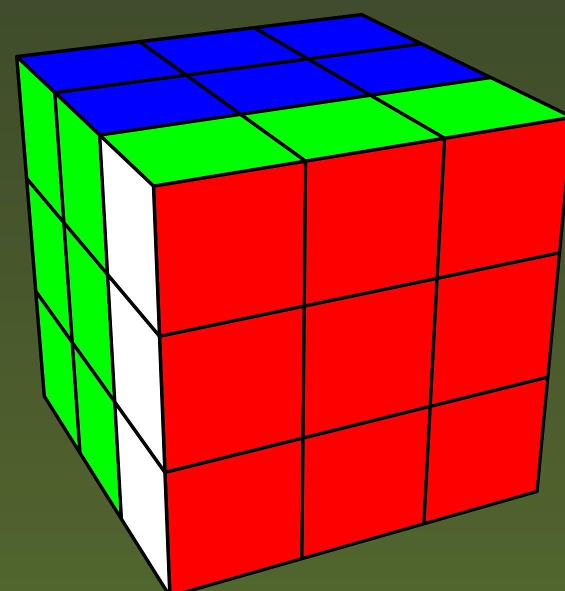
# O movimento $F$

Desse modo a letra $F$ indica ao mesmo:

- A face do cubo que fica sempre apontando em nossa direção.
- Girar essa face em sentido horário um quarto de volta.

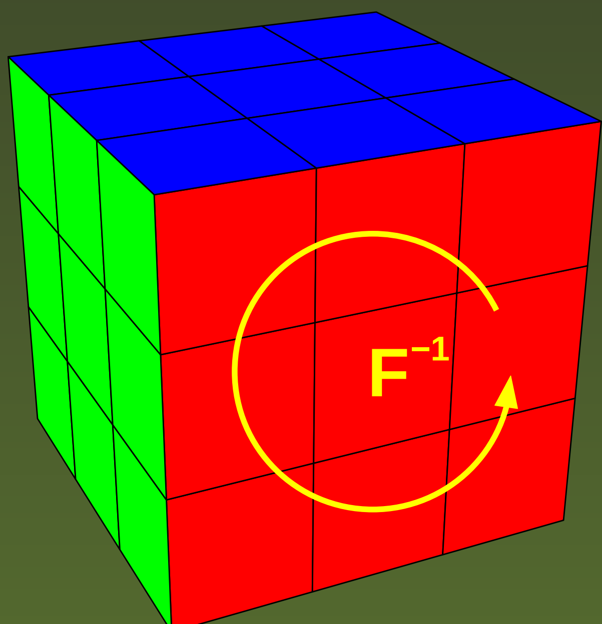



$\longrightarrow$

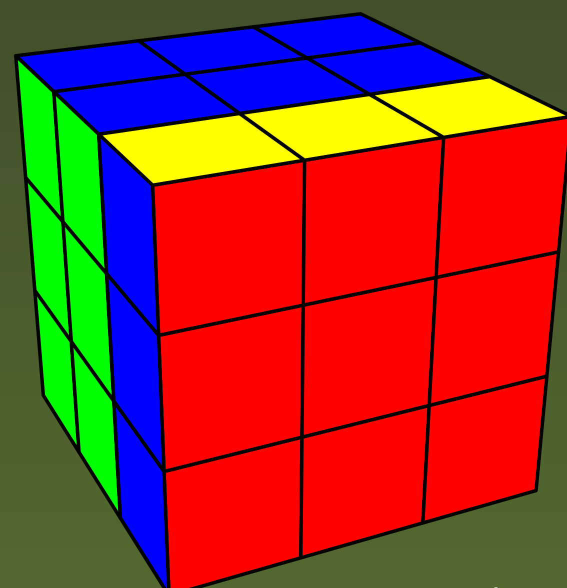


# O movimento $F^{-1}$

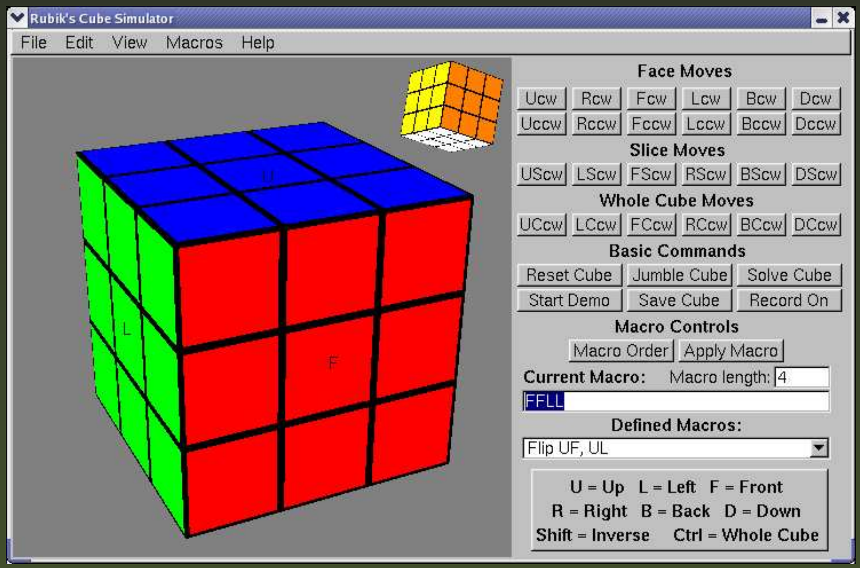
- Por outro lado, indicamos por $F^{-1}$ o movimento oposto de $F$.
- Isto é, girar a face $F$ em sentido anti-horário um quarto de volta.
- O programa **Rubik** indica esse movimento por $f$.




$\longrightarrow$



# O Programa Rubik




- É útil para praticar movimentos e para experimentação.
- Pode nos ajudar a resolver um Cubo embaralhado.
- Pode ser baixado gratuitamente do site `http://www.geometer.org/rubik/`

# Algumas Restrições

- Os movimentos alteram a configuração das facetas dos cubinhos, mas preservam a forma geral do cubo, por isso são chamados *simetrias* do cubo.

# Algumas Restrições

- Os movimentos alteram a configuração das facetas dos cubinhos, mas preservam a forma geral do cubo, por isso são chamados *simetrias* do cubo.
- Nem todas as configurações são possíveis. Por exemplo, cubinhos de aresta não podem ser trocados com os de cantos, etc.

# Algumas Restrições

- Os movimentos alteram a configuração das facetas dos cubinhos, mas preservam a forma geral do cubo, por isso são chamados *simetrias* do cubo.
- Nem todas as configurações são possíveis. Por exemplo, cubinhos de aresta não podem ser trocados com os de cantos, etc.
- Há portanto algumas restrições óbvias nas possíveis configurações. Mais adiante, veremos que há outras menos óbvias.

# Algumas Restrições

- Os movimentos alteram a configuração das facetas dos cubinhos, mas preservam a forma geral do cubo, por isso são chamados *simetrias* do cubo.
- Nem todas as configurações são possíveis. Por exemplo, cubinhos de aresta não podem ser trocados com os de cantos, etc.
- Há portanto algumas restrições óbvias nas possíveis configurações. Mais adiante, veremos que há outras menos óbvias.
- Por exemplo, será que é possível trocar apenas dois cubinhos de lugar deixando todo o resto como está?

# Seqüências de Movimentos

- Normalmente, vamos desejar fazer vários movimentos em seqüência, por exemplo, $F$ seguido de $L$ seguido de $U$, talvez repetidos múltiplas vezes.

# Seqüências de Movimentos

- Normalmente, vamos desejar fazer vários movimentos em seqüência, por exemplo, $F$ seguido de $L$ seguido de $U$, talvez repetidos múltiplas vezes.
- Às vezes vamos desejar memorizar seqüências inteiras para poder repetí-las rapidamente.

# Seqüências de Movimentos

- Normalmente, vamos desejar fazer vários movimentos em seqüência, por exemplo, $F$ seguido de $L$ seguido de $U$, talvez repetidos múltiplas vezes.
- Às vezes vamos desejar memorizar seqüências inteiras para poder repetí-las rapidamente.
- Podemos simplesmente escrever a seqüência como $FLU$, como se quiséssemos "multiplicar" $F$ por $L$ por $U$.

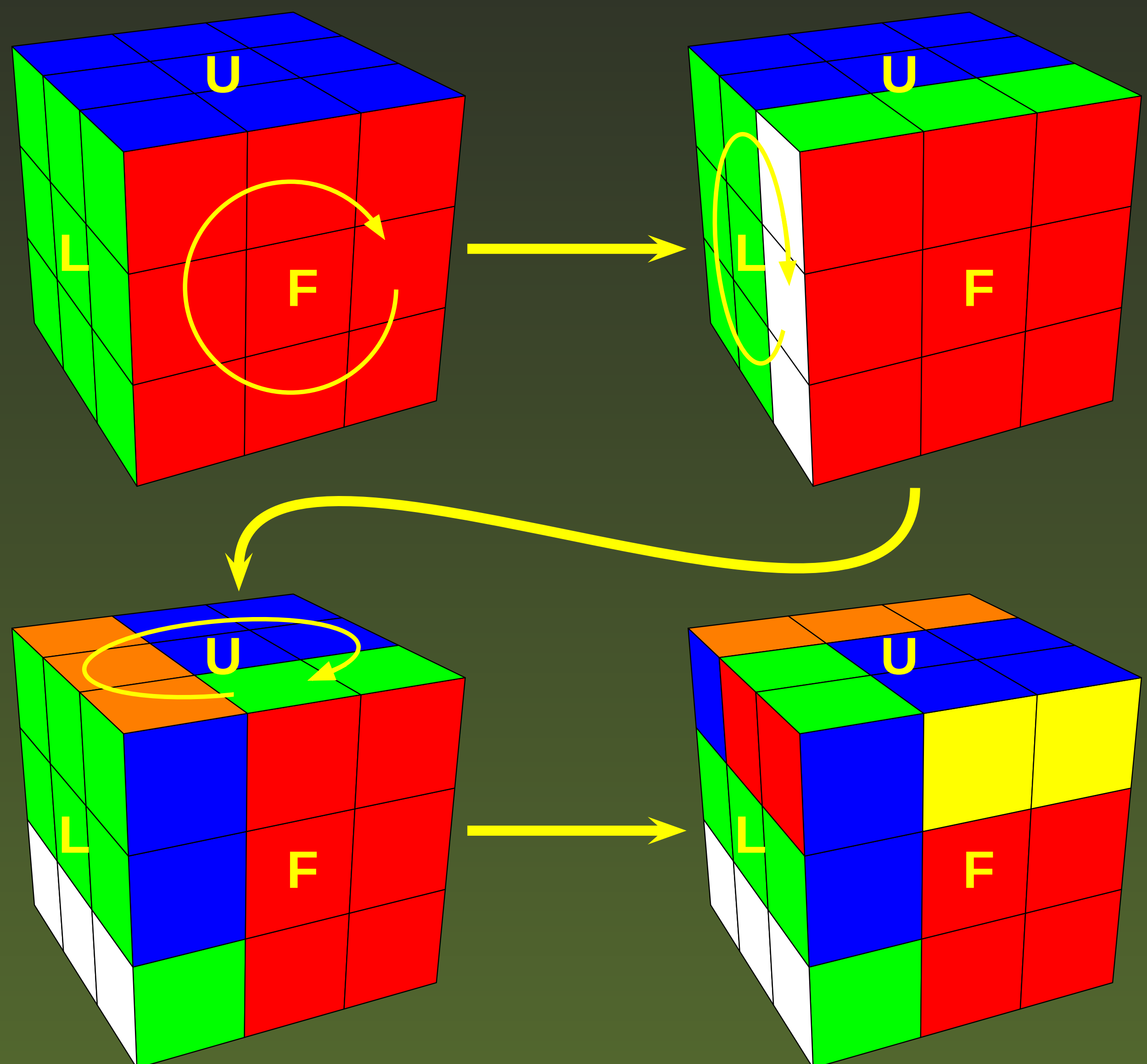
# Seqüências de Movimentos

- Normalmente, vamos desejar fazer vários movimentos em seqüência, por exemplo, $F$ seguido de $L$ seguido de $U$, talvez repetidos múltiplas vezes.
- Às vezes vamos desejar memorizar seqüências inteiras para poder repetí-las rapidamente.
- Podemos simplesmente escrever a seqüência como $FLU$, como se quiséssemos “multiplicar” $F$ por $L$ por $U$.
- Convém também atribuir letras às seqüências, por exemplo $S = FLU$.

# Seqüências de Movimentos

- Normalmente, vamos desejar fazer vários movimentos em seqüência, por exemplo, $F$ seguido de $L$ seguido de $U$, talvez repetidos múltiplas vezes.
- Às vezes vamos desejar memorizar seqüências inteiras para poder repetí-las rapidamente.
- Podemos simplesmente escrever a seqüência como $FLU$, como se quiséssemos “multiplicar” $F$ por $L$ por $U$.
- Convém também atribuir letras às seqüências, por exemplo $S = FLU$.
- O número de quartos-de-volta (q) de $S$ é o seu comprimento. Por exemplo, $S = FLU$ tem 3q.

# A seqüência $FLU$



# Macros

- Uma seqüência longa finita $S$ consistindo de dois ou mais movimentos é chamada *macro*.

# Macros

- Uma seqüência longa finita $S$ consistindo de dois ou mais movimentos é chamada *macro*.
- Uma macro deve ser pensada como um conjunto de instruções indivisível a ser executado em bloco.

# Macros

- Uma seqüência longa finita $S$ consistindo de dois ou mais movimentos é chamada *macro*.
- Uma macro deve ser pensada como um conjunto de instruções indivisível a ser executado em bloco.
- Por exemplo: se $S = FLU$, executar $S$ significa fazer $F$ depois $L$ depois $U$, sem interrupções.

# Macros

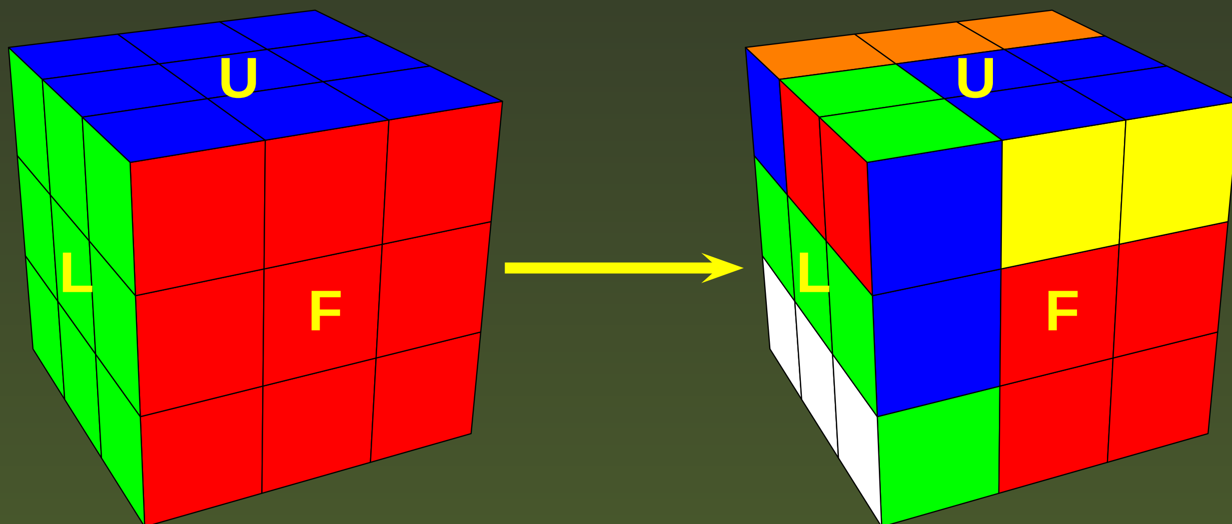
- Uma seqüência longa finita $S$ consistindo de dois ou mais movimentos é chamada *macro*.
- Uma macro deve ser pensada como um conjunto de instruções indivisível a ser executado em bloco.
- Por exemplo: se $S = FLU$, executar $S$ significa fazer $F$ depois $L$ depois $U$, sem interrupções.
- Uma macro pode consistir de outras macros: se $T = SDS$, então executar $T$ significa fazer $F, L, U, D, F, L, U$.

# Macros

- Uma seqüência longa finita $S$ consistindo de dois ou mais movimentos é chamada *macro*.
- Uma macro deve ser pensada como um conjunto de instruções indivisível a ser executado em bloco.
- Por exemplo: se $S = FLU$, executar $S$ significa fazer $F$ depois $L$ depois $U$, sem interrupções.
- Uma macro pode consistir de outras macros: se $T = SDS$, então executar $T$ significa fazer $F, L, U, D, F, L, U$.
- Mais adiante veremos que macros podem ser muito úteis para lidar com o Cubo.

# A macro $S = FLU$

Fazendo de conta que não percebemos os movimentos intermediários, podemos pensar que a macro $S = FLU$ tem o seguinte efeito sobre Cubo:




Isto é, $S$ faz o cubo passar diretamente da situação à esquerda para a nova situação à direita. É claro que isto é teoricamente possível, mas não é fisicamente possível.

# Movimentos Inversos

- Um movimento muito importante é o “fazer nada”, isto é, deixar o cubo inalterado. Indicamos esse movimento por $I$, e o chamamos *identidade*.

# Movimentos Inversos

- Um movimento muito importante é o “fazer nada”, isto é, deixar o cubo inalterado. Indicamos esse movimento por $I$, e o chamamos *identidade*.
- Claramente, $FF^{-1} = I$, pois fazer $F$ seguido de $F^{-1}$ é o mesmo que não fazer nada com o cubo.

# Movimentos Inversos

- Um movimento muito importante é o “fazer nada”, isto é, deixar o cubo inalterado. Indicamos esse movimento por $I$, e o chamamos *identidade*.
- Claramente, $FF^{-1} = I$, pois fazer $F$ seguido de $F^{-1}$ é o mesmo que não fazer nada com o cubo.
- Por essa razão, temos $(FLU)(U^{-1}L^{-1}F^{-1}) = I$.

# Movimentos Inversos

- Um movimento muito importante é o "fazer nada", isto é, deixar o cubo inalterado. Indicamos esse movimento por $I$, e o chamamos *identidade*.
- Claramente, $FF^{-1} = I$, pois fazer $F$ seguido de $F^{-1}$ é o mesmo que não fazer nada com o cubo.
- Por essa razão, temos $(FLU)(U^{-1}L^{-1}F^{-1}) = I$.
- Escrevendo $S = FLU$, essa equação nos diz que $U^{-1}L^{-1}F^{-1}$ faz o oposto de $S$, logo representa $S^{-1}$.

# Movimentos Inversos

- Um movimento muito importante é o "fazer nada", isto é, deixar o cubo inalterado. Indicamos esse movimento por $I$, e o chamamos *identidade*.
- Claramente, $FF^{-1} = I$, pois fazer $F$ seguido de $F^{-1}$ é o mesmo que não fazer nada com o cubo.
- Por essa razão, temos $(FLU)(U^{-1}L^{-1}F^{-1}) = I$.
- Escrevendo $S = FLU$, essa equação nos diz que $U^{-1}L^{-1}F^{-1}$ faz o oposto de $S$, logo representa $S^{-1}$.
- Portanto, "*para desfazer uma seqüência de movimentos, devemos executar em ordem reversa os opostos dos movimentos individuais*".

# Ordem e Movimentos Repetitivos

- Convém indicar a seqüência $FF$ por $F^2$, $FFF$ por $F^3$, $LFLFLFLF$ por $(LF)^4$ e assim por diante.

# Ordem e Movimentos Repetitivos

- Convém indicar a seqüência $FF$ por $F^2$, $FFF$ por $F^3$, $LFLFLFLF$ por $(LF)^4$ e assim por diante.
- É interessante notar que $F\,F^3 = F^4 = I$, ou seja $F^3 = F^{-1}$, e que $F^{-1}F = I$, logo $(F^{-1})^{-1} = F$.

# Ordem e Movimentos Repetitivos

- Convém indicar a seqüência $FF$ por $F^2$, $FFF$ por $F^3$, $LFLFLFLF$ por $(LF)^4$ e assim por diante.
- É interessante notar que $F\,F^3 = F^4 = I$, ou seja $F^3 = F^{-1}$, e que $F^{-1}F = I$, logo $(F^{-1})^{-1} = F$.
- Ademais, $F^4$ é a primeira vez que as repetições de $F$ voltam a dar $I$. Por isso, dizemos que $F$ tem *ordem* 4, e escrevemos $o(F) = 4$.

# Ordem e Movimentos Repetitivos

- Convém indicar a seqüência $FF$ por $F^2$, $FFF$ por $F^3$, $LFLFLFLF$ por $(LF)^4$ e assim por diante.
- É interessante notar que $F\,F^3 = F^4 = I$, ou seja $F^3 = F^{-1}$, e que $F^{-1}F = I$, logo $(F^{-1})^{-1} = F$.
- Ademais, $F^4$ é a primeira vez que as repetições de $F$ voltam a dar $I$. Por isso, dizemos que $F$ tem *ordem* 4, e escrevemos $o(F) = 4$.
- Os movimentos $F, B, R, L, U, D$ têm ordem 4, mas a macro $S = L^2F^2$ tem ordem 6 e a macro $T = LF$ tem ordem 105 (experimente isso com o seu cubo!).

# Toda seqüência tem uma ordem

Seja $S$ uma seqüência (finita) qualquer de movimentos.
Note que:

- $S$ altera a configuração das facetas.

# Toda seqüência tem uma ordem

Seja $S$ uma seqüência (finita) qualquer de movimentos.
Note que:

- $S$ altera a configuração das facetas.
- Há apenas um número finito de facetas.

# Toda seqüência tem uma ordem

Seja $S$ uma seqüência (finita) qualquer de movimentos. Note que:

- $S$ altera a configuração das facetas.
- Há apenas um número finito de facetas.
- Logo, se fizermos $SSS\cdots$, em algum momento vamos certamente repetir uma configuração.

# Toda seqüência tem uma ordem

Seja $S$ uma seqüência (finita) qualquer de movimentos. Note que:

- $S$ altera a configuração das facetas.
- Há apenas um número finito de facetas.
- Logo, se fizermos $SSS\cdots$, em algum momento vamos certamente repetir uma configuração.
- Quer dizer que a configuração após $S^k$ se repetirá para $S^m$.

# Toda seqüência tem uma ordem

Seja $S$ uma seqüência (finita) qualquer de movimentos. Note que:

- $S$ altera a configuração das facetas.
- Há apenas um número finito de facetas.
- Logo, se fizermos $SSS\cdots$, em algum momento vamos certamente repetir uma configuração.
- Quer dizer que a configuração após $S^k$ se repetirá para $S^m$.
- Em cada um desses momentos, retrocedendo $k$ passos, vamos voltar respectivamente para $I$ e $S^p$, onde $p = m - k$, logo $S^p = I$.

# Comutatividade

- Comutatividade é a lei familiar da aritmética: “a ordem dos fatores não altera o produto”.

# Comutatividade

- Comutatividade é a lei familiar da aritmética: “a ordem dos fatores não altera o produto”.
- Por exemplo, $9 \times 7 = 7 \times 9$.

# Comutatividade

- Comutatividade é a lei familiar da aritmética:
“a ordem dos fatores não altera o produto”.
- Por exemplo, $9 \times 7 = 7 \times 9$.
- De modo geral, se $a$ e $b$ são números reais quaisquer, então $ab = ba$.

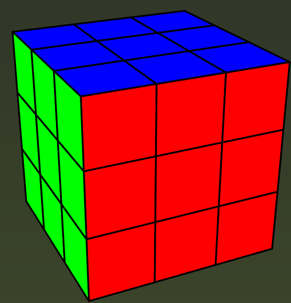
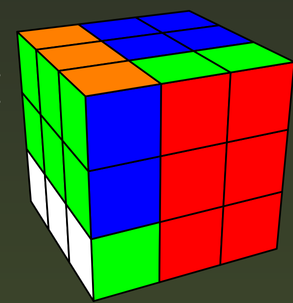
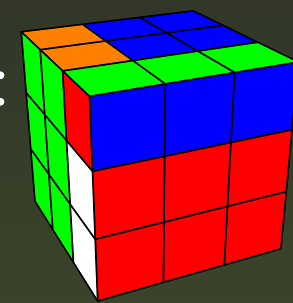
# Comutatividade

- Comutatividade é a lei familiar da aritmética: “a ordem dos fatores não altera o produto”.
- Por exemplo, $9 \times 7 = 7 \times 9$.
- De modo geral, se $a$ e $b$ são números reais quaisquer, então $ab = ba$.
- A comutatividade permite-nos simplificar uma expressão longa:
  $b^2a^3c^2a^2b^5c = a^{(3+2)}b^{(2+5)}c^{(2+1)} = a^5b^7c^3$.

# Comutatividade

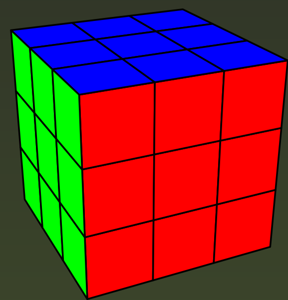
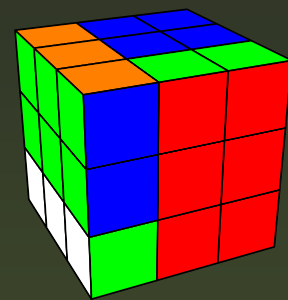
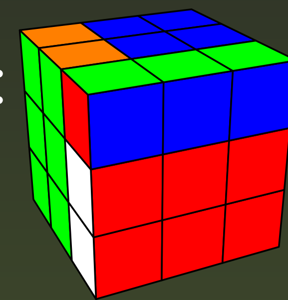
- Comutatividade é a lei familiar da aritmética:
  “a ordem dos fatores não altera o produto”.
- Por exemplo, $9 \times 7 = 7 \times 9$.
- De modo geral, se $a$ e $b$ são números reais quaisquer, então $ab = ba$.
- A comutatividade permite-nos simplificar uma expressão longa:
  $b^2a^3c^2a^2b^5c = a^{(3+2)}b^{(2+5)}c^{(2+1)} = a^5b^7c^3$.
- No Cubo, há alguns movimentos comutativos, por exemplo, $FB = BF$, $RL = LR$ e $UD = DU$.

# Não-Comutatividade

$I:$  $FL:$  $LF:$ 

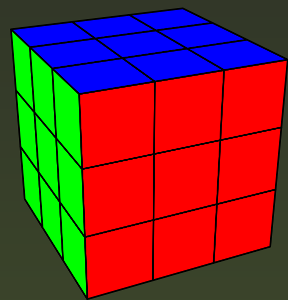
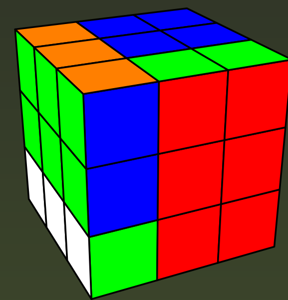
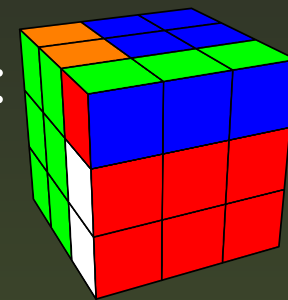
- Um fato óbvio, mas muito importante, é que $FL \neq LF$ como mostra a figura acima.

# Não-Comutatividade

$I:$  $FL:$  $LF:$ 

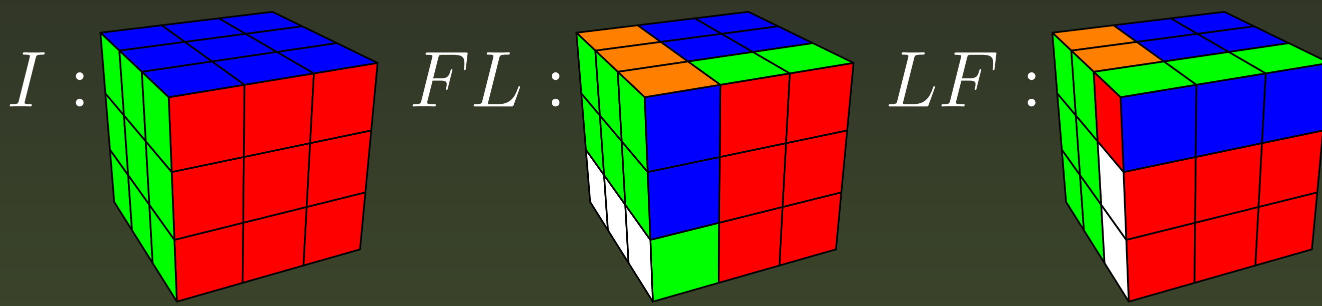
- Um fato óbvio, mas muito importante, é que $FL \neq LF$ como mostra a figura acima.
- Chamamos esse fenômeno de *não-comutatividade*.

# Não-Comutatividade

$I:$  $FL:$  $LF:$ 

- Um fato óbvio, mas muito importante, é que $FL \neq LF$ como mostra a figura acima.
- Chamamos esse fenômeno de *não-comutatividade*.
- O mesmo ocorre com quaisquer faces adjacentes.

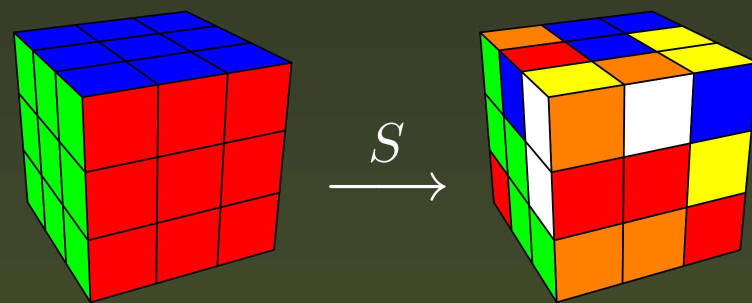
# Não-Comutatividade



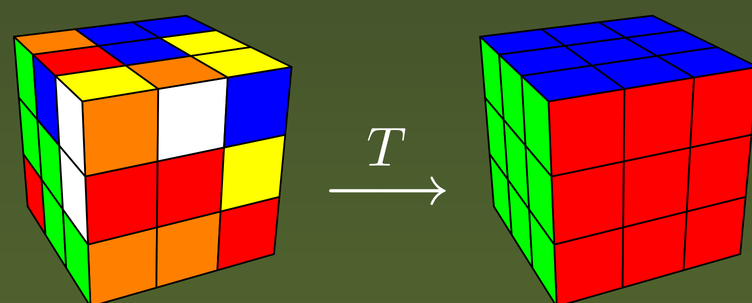

- Um fato óbvio, mas muito importante, é que $FL \neq LF$ como mostra a figura acima.
- Chamamos esse fenômeno de *não-comutatividade*.
- O mesmo ocorre com quaisquer faces adjacentes.
- É justamente a não-comutatividade que torna o Cubo um quebra-cabeças interessante.

# O que é “resolver” o Cubo?

- *Embaralhar* o Cubo significa aplicar uma seqüência aleatória de movimentos $S$ a um Cubo resolvido:




- *Resolver* o Cubo geralmente significa encontrar alguma seqüência de movimentos $T$ tal que $ST = I$.

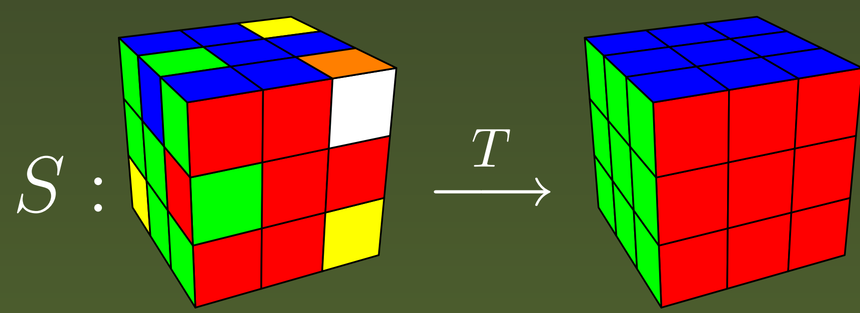


# Resolver não é só desembaralhar

- Note que $T$ não precisa ser “igual” a $S^{-1}$.

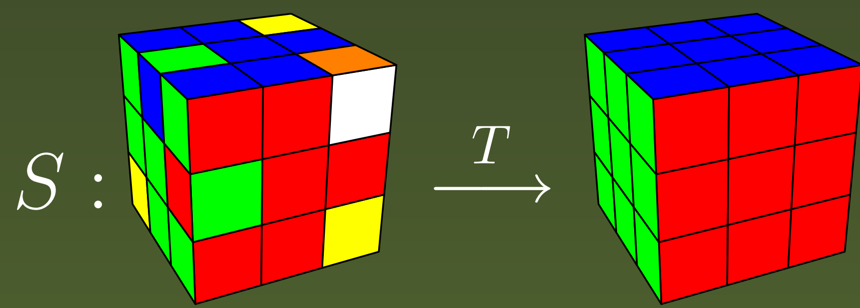
# Resolver não é só desembaralhar

- Note que $T$ não precisa ser "igual" a $S^{-1}$.
- Por exemplo, se $S = (FLU)^{42}$, então tanto $S^{-1} = (U^{-1}L^{-1}F^{-1})^{42}$ quanto $T = FLU^{-1}L^2U^2L^2UF^{-1}U^2L^{-1}UF^2U^2F^2U^{-1}$ resolvem o Cubo. Só que $S^{-1}$ tem 126q, enquanto $T$ tem apenas 22q.



# Resolver não é só desembaralhar

- Note que $T$ não precisa ser "igual" a $S^{-1}$.
- Por exemplo, se $S = (FLU)^{42}$, então tanto $S^{-1} = (U^{-1}L^{-1}F^{-1})^{42}$ quanto $T = FLU^{-1}L^2U^2L^2UF^{-1}U^2L^{-1}UF^2U^2F^2U^{-1}$ resolvem o Cubo. Só que $S^{-1}$ tem 126q, enquanto $T$ tem apenas 22q.




- É interessante notar que $TS = ITS = S^{-1}STS = S^{-1}IS = I$, portanto $S = T^{-1}$.

# Como os humanos resolvem o Cubo

- Método da chave-de-fenda: Gire uma face de 45 graus e enfie cuidadosamente uma chave-de-fenda sob o cubinho de aresta para que ele salte fora, etc.

# Como os humanos resolvem o Cubo

- Método da chave-de-fenda: Gire uma face de 45 graus e enfie cuidadosamente uma chave-de-fenda sob o cubinho de aresta para que ele salte fora, etc.
- Método empírico: é o método adotado pela maioria das pessoas. É demorado, mas pode ser muito instrutivo, e com perseverança pode-se chegar lá.

# Como os humanos resolvem o Cubo

- Método da chave-de-fenda: Gire uma face de 45 graus e enfie cuidadosamente uma chave-de-fenda sob o cubinho de aresta para que ele salte fora, etc.
- Método empírico: é o método adotado pela maioria das pessoas. É demorado, mas pode ser muito instrutivo, e com perseverança pode-se chegar lá.
- Método estratégico: usar um conjunto de macros para realizar tarefas específicas com o Cubo a fim de levá-lo gradativamente à solução.

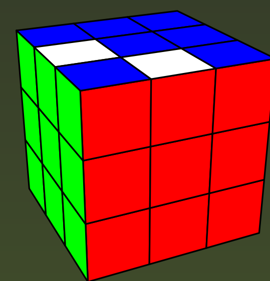
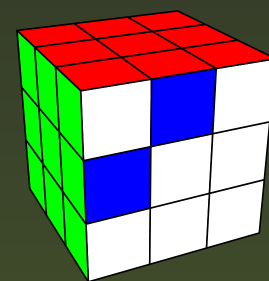
# Como os humanos resolvem o Cubo

- Método da chave-de-fenda: Gire uma face de 45 graus e enfie cuidadosamente uma chave-de-fenda sob o cubinho de aresta para que ele salte fora, etc.
- Método empírico: é o método adotado pela maioria das pessoas. É demorado, mas pode ser muito instrutivo, e com perseverança pode-se chegar lá.
- Método estratégico: usar um conjunto de macros para realizar tarefas específicas com o Cubo a fim de levá-lo gradativamente à solução.
- Método algébrico: encontrar a solução fazendo as contas. Requer conhecimentos da Teoria de Grupos.

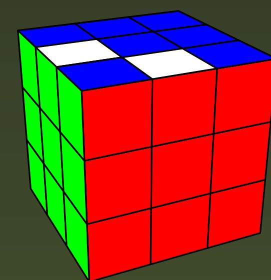
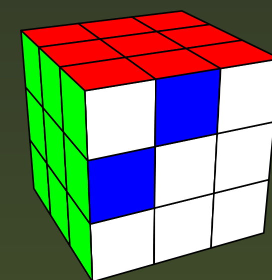
# Um exemplo

- Vimos acima que $S = F^2L^2$ é tal que $S^6 = I$.

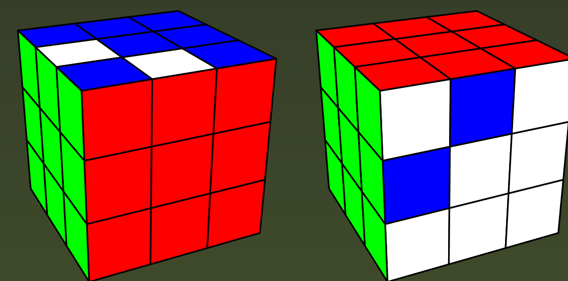
# Um exemplo

- Vimos acima que $S = F^2L^2$ é tal que $S^6 = I$.
- Considere $T = S^3 = FFLLFFLLFFLL$. Seu efeito no Cubo é o seguinte:   ou seja trocar $UF \leftrightarrow DF$ e $UL \leftrightarrow DL$, deixando todo o resto como está.

# Um exemplo

- Vimos acima que $S = F^2L^2$ é tal que $S^6 = I$.
- Considere $T = S^3 = FFLLFFLLFFLL$. Seu efeito no Cubo é o seguinte:   ou seja trocar $UF \leftrightarrow DF$ e $UL \leftrightarrow DL$, deixando todo o resto como está.
- A macro $T$ realiza uma tarefa bastante específica, por isso ela é muito útil para resolver o Cubo.

# Um exemplo

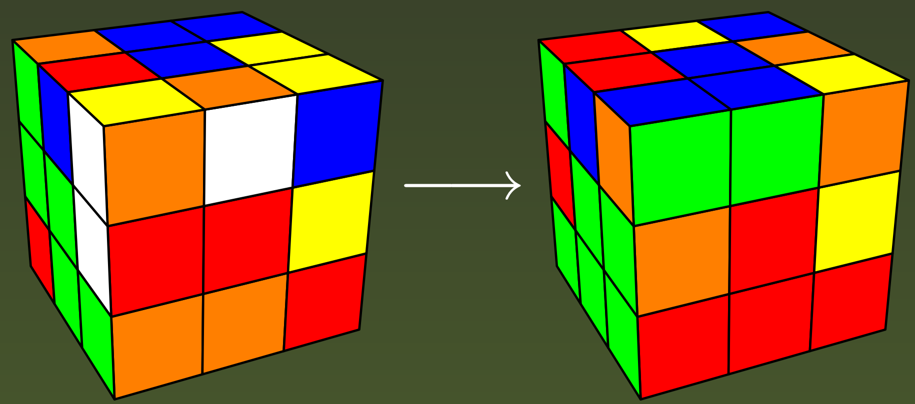
- Vimos acima que $S = F^2L^2$ é tal que $S^6 = I$.
- Considere $T = S^3 = FFLLFFLLFFLL$. Seu efeito no Cubo é o seguinte:  ou seja trocar $UF \leftrightarrow DF$ e $UL \leftrightarrow DL$, deixando todo o resto como está.
- A macro $T$ realiza uma tarefa bastante específica, por isso ela é muito útil para resolver o Cubo.
- Curiosamente, como $T^2 = I$, logo $T^{-1} = T$ e portanto $(F^2L^2)^3 = (L^2F^2)^3$.

# Uma estratégia de resolução

- Nossa estratégia será a de resolver o Cubo por camadas.

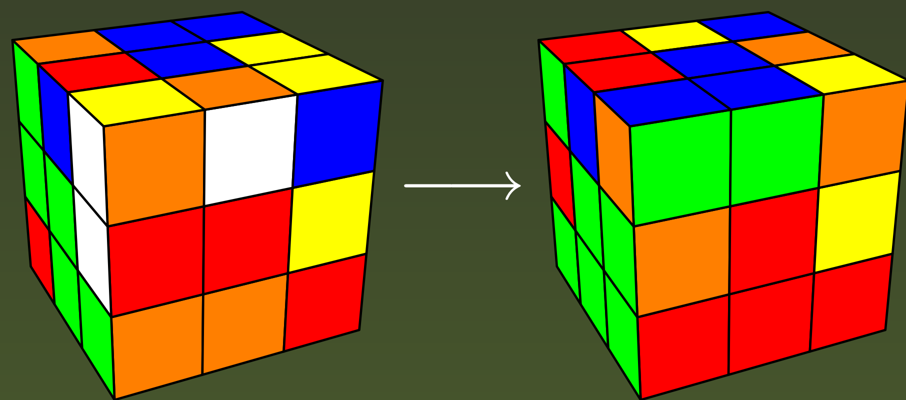
# Uma estratégia de resolução

- Nossa estratégia será a de resolver o Cubo por camadas.
- Começamos por resolver a primeira camada:



# Uma estratégia de resolução

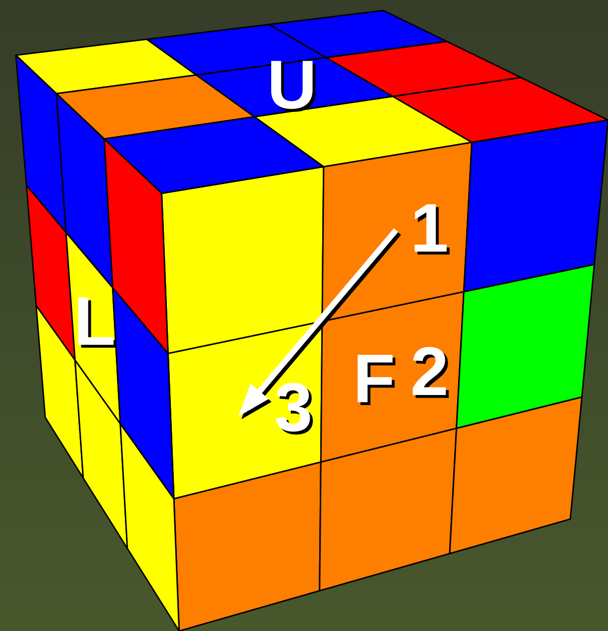
- Nossa estratégia será a de resolver o Cubo por camadas.
- Começamos por resolver a primeira camada:



- Isto é fácil, pois não é preciso se preocupar com as demais camadas. É melhor começar pelas arestas e depois pelos cantos.

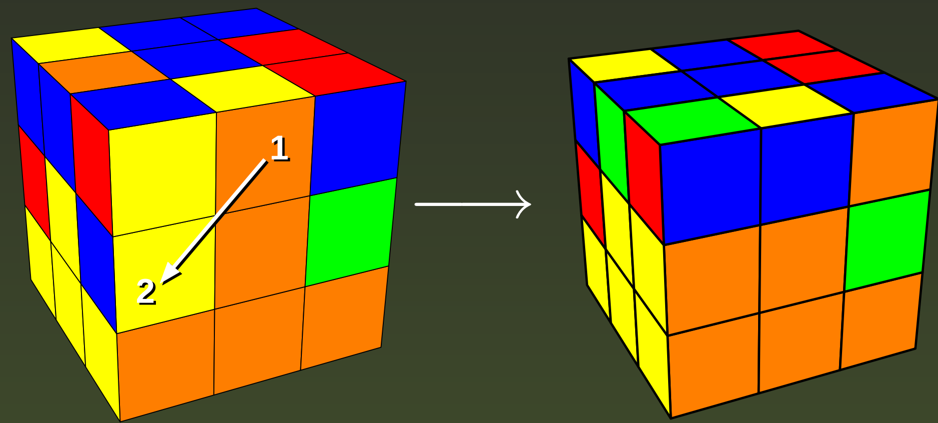
# Resolvendo a segunda camada

Esta etapa consiste em colocar os cubinhos de aresta da segunda camada na sua posição e orientação corretas.



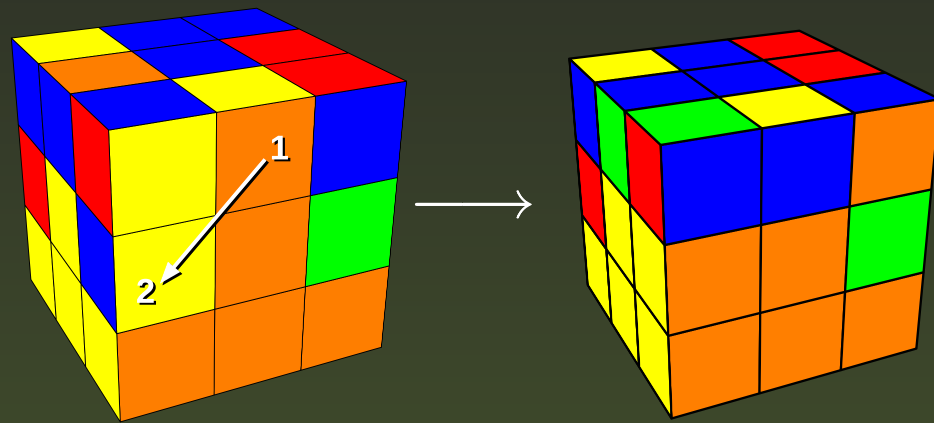

Para fazer isso, primeiro posicionamos o cubinho na posição $UF$ (1) para depois movê-lo para a posição $LF$ (3). Dependendo das cores das facetas (1) e (2), isso pode ser feito de um dos seguintes modos:

# $UF \leftrightarrow LF$, mesma cor



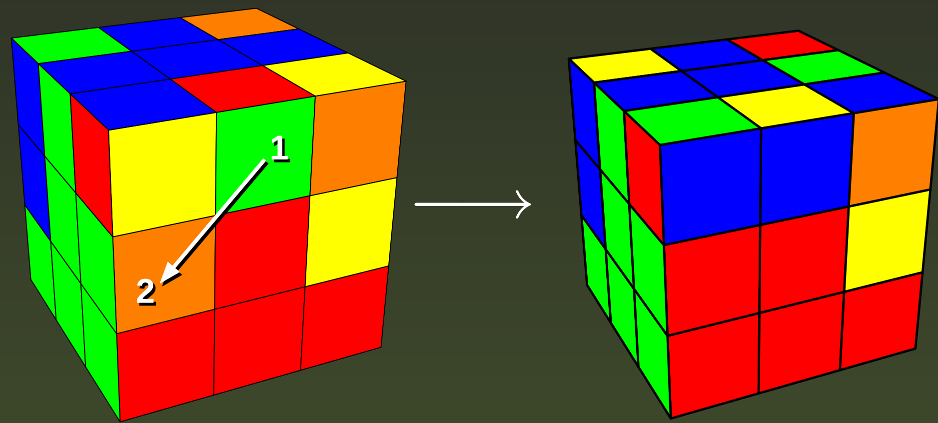

A macro para isso é $U^{-1}FU^2RUR^{-1}U^2F^{-1}$ (10q).

# $UF \leftrightarrow LF$, mesma cor



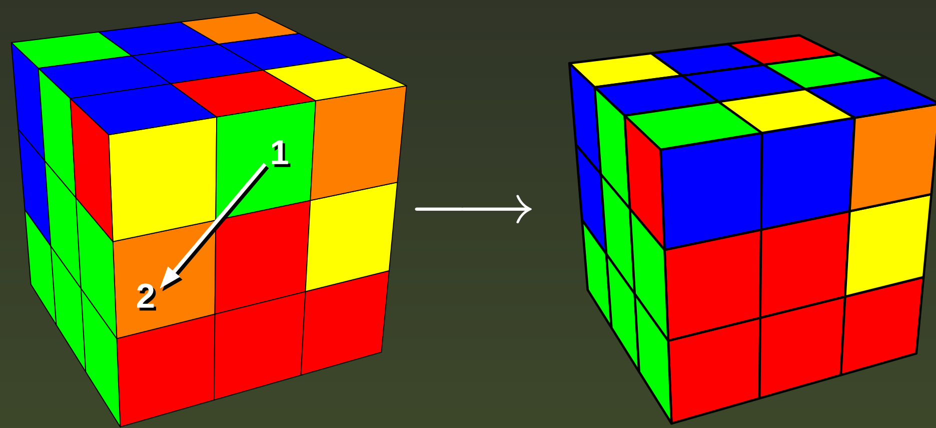

A macro para isso é $U^{-1}FU^2RUR^{-1}U^2F^{-1}$ (10q). Observando que $(FU^2R)^{-1} = R^{-1}U^2F^{-1}$ fica fácil memorizar esta macro. Podemos pensar assim: primeiro movemos o cubinho (1) para a direita, e depois fazemos $FU^2R$. O cubinho vai parar à esquerda, por causa de $U^2$. Ele deve estar atrás para terminar no lugar certo, por isso fazemos $U$ e, em seguida, $R^{-1}U^2F^{-1}$, e pronto.

# $UF \leftrightarrow LF$, cores diferentes




A macro para isso é $FU^2RU^{-1}R^{-1}U^2F^{-1}$ (9q).

# $UF \leftrightarrow LF$, cores diferentes

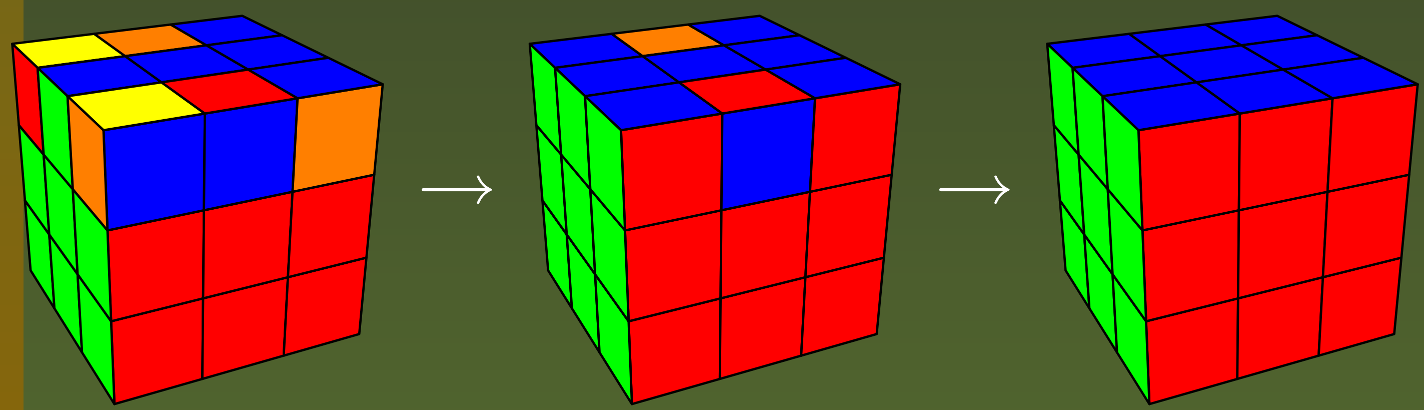



A macro para isso é $FU^2RU^{-1}R^{-1}U^2F^{-1}$ (9q).
Aqui vale a mesma observação sobre $FU^2R$. Só que agora, deixamos o cubinho (1) onde ele está e fazemos $FU^2R$. Ele vai parar no topo à direita. Como ele deve estar atrás, fazemos $U^{-1}$ e, em seguida $R^{-1}U^2F^{-1}$, e pronto.

# Resolvendo a terceira camada

Esta etapa é a mais difícil, pois o único movimento simples que não afeta o resto do Cubo é girar a face $U$. O objetivo pode ser atingido em duas etapas:

- Primeiro colocamos os cubinhos de canto em suas posições e orientações corretas.
- Depois fazemos o mesmo com os cubinhos de aresta.



# Posicionando os cantos

- A esta altura, as duas camadas inferiores estão resolvidas, mas falta resolver a terceira.

# Posicionando os cantos

- A esta altura, as duas camadas inferiores estão resolvidas, mas falta resolver a terceira.
- Começamos por girar essa camada até que um ou mais cantos estejam na posição correta (sempre ao menos um canto estará correto).

# Posicionando os cantos

- A esta altura, as duas camadas inferiores estão resolvidas, mas falta resolver a terceira.
- Começamos por girar essa camada até que um ou mais cantos estejam na posição correta (sempre ao menos um canto estará correto).
- Se há cantos errados, deixamos o que estiver certo na posição $UFR$.

# Posicionando os cantos

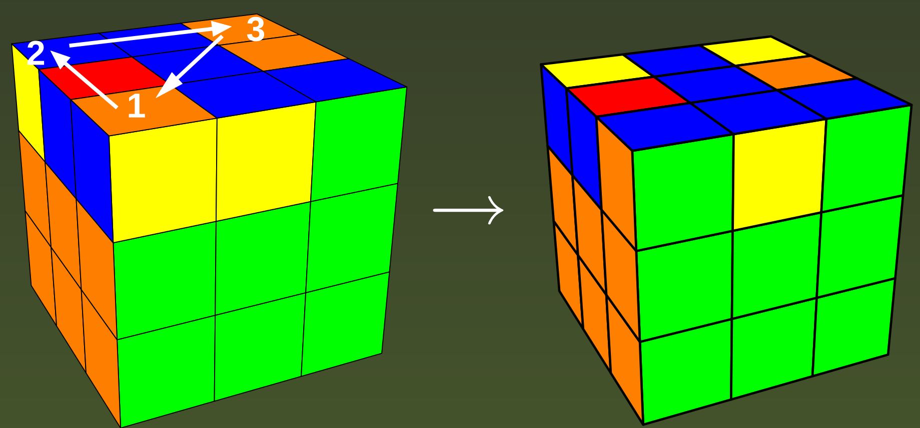
- A esta altura, as duas camadas inferiores estão resolvidas, mas falta resolver a terceira.
- Começamos por girar essa camada até que um ou mais cantos estejam na posição correta (sempre ao menos um canto estará correto).
- Se há cantos errados, deixamos o que estiver certo na posição $UFR$.
- Um fato que veremos adiante é que *não é possível trocar dois cantos apenas, deixando o resto como está, mas podemos trocar três*.

# Posicionando os cantos

- A esta altura, as duas camadas inferiores estão resolvidas, mas falta resolver a terceira.
- Começamos por girar essa camada até que um ou mais cantos estejam na posição correta (sempre ao menos um canto estará correto).
- Se há cantos errados, deixamos o que estiver certo na posição $UFR$.
- Um fato que veremos adiante é que *não é possível trocar dois cantos apenas, deixando o resto como está, mas podemos trocar três*.
- Os demais cantos, $ULF$, $ULB$ e $URB$, podem ser trocados ciclicamente como segue.

# Posicionando os cantos

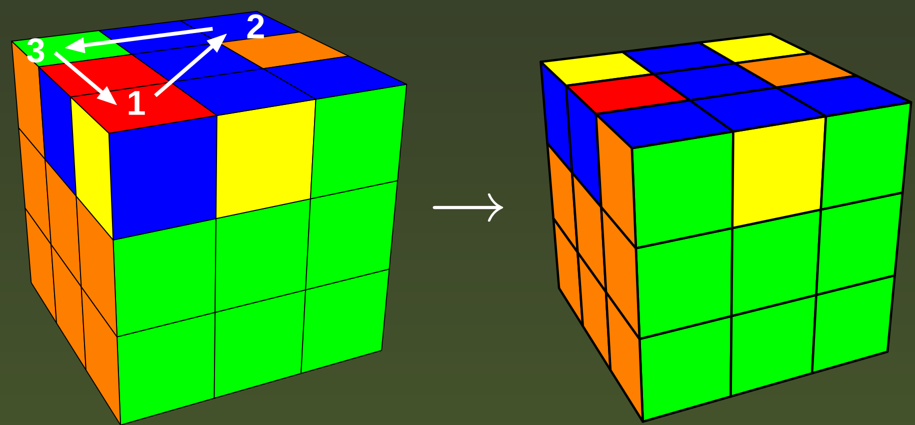
Movendo os cantos $ULF(1) \rightarrow ULB(2) \rightarrow URB(3) \rightarrow ULF(1)$, no sentido horário, como na figura abaixo:




- A macro para isso é a seguinte: $L^{-1}URU^{-1}LUR^{-1}U^{-1}$ (8q).

# Posicionando os cantos

Movendo os cantos $ULF(1) \to URB(2) \to ULB(3) \to ULF(1)$, no sentido anti-horário, como na figura abaixo:




- A macro para isso é a seguinte: $BU^{-1}F^{-1}UB^{-1}U^{-1}FU$ (8q).

# Orientando os cantos

- Agora cantos estão na posição certa, mas podem estar orientados incorretamente.

# Orientando os cantos

- Agora cantos estão na posição certa, mas podem estar orientados incorretamente.
- Nesse caso, é preciso girar os cantos errados.

# Orientando os cantos

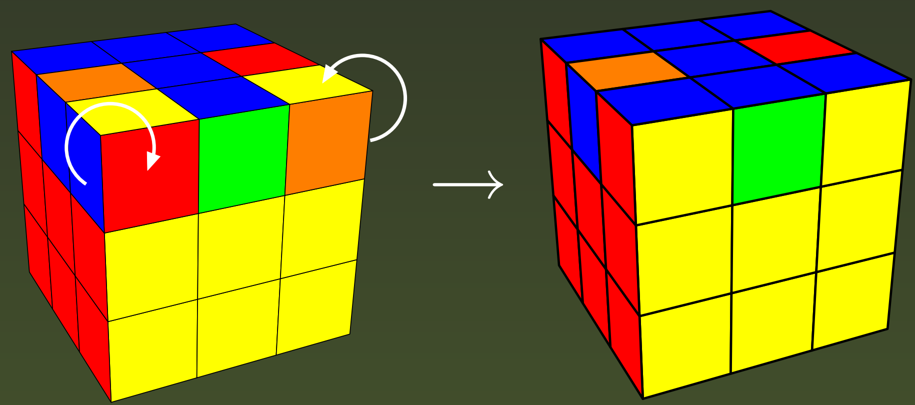
- Agora cantos estão na posição certa, mas podem estar orientados incorretamente.
- Nesse caso, é preciso girar os cantos errados.
- No entanto, é surpreendente que *girar um canto em sentido horário requer que outro seja girado em sentido anti-horário e vice-versa*.

# Orientando os cantos

- Agora cantos estão na posição certa, mas podem estar orientados incorretamente.
- Nesse caso, é preciso girar os cantos errados.
- No entanto, é surpreendente que *girar um canto em sentido horário requer que outro seja girado em sentido anti-horário e vice-versa*.
- A razão disto será apresentada mais adiante.

# Orientando os cantos

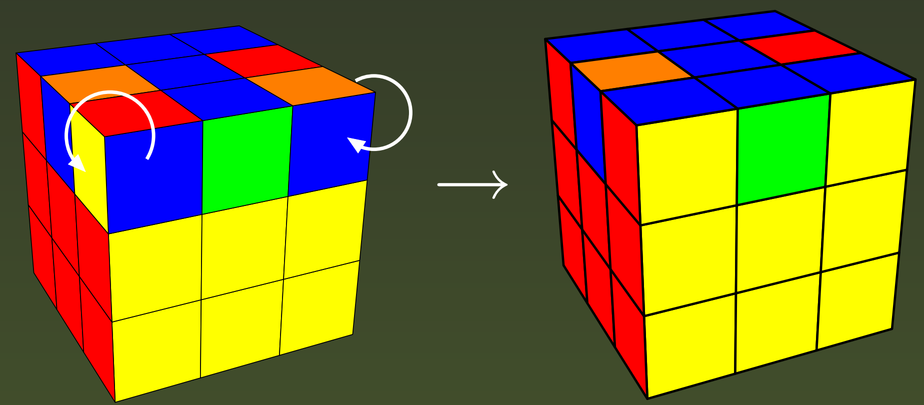
Girando os cantos superiores frontais, $UFL$ em sentido horário e $UFR$ em sentido anti-horário:



- A macro para isso é a seguinte: $F^{-1}DFLDL^{-1}ULD^{-1}L^{-1}F^{-1}D^{-1}FU^{-1}$ (14q)
- Se $S = F^{-1}DFLDL^{-1}$, então esta macro é simplesmente $SUS^{-1}U^{-1}$.

# Orientando os cantos

Girando os cantos superiores frontais, $UFL$ em sentido anti-horário e $UFR$ em sentido horário:



- A macro para isso é a seguinte: $R^{-1}DRFDF^{-1}U^{-1}FD^{-1}F^{-1}R^{-1}D^{-1}RU$ (14q)
- Se $T = R^{-1}DRFDF^{-1}$, então esta macro é simplesmente $TU^{-1}T^{-1}U$

# Posicionando as arestas

- Agora os cubinhos de cantos estão corretos, mas ainda falta posicionar e orientar as arestas.

# Posicionando as arestas

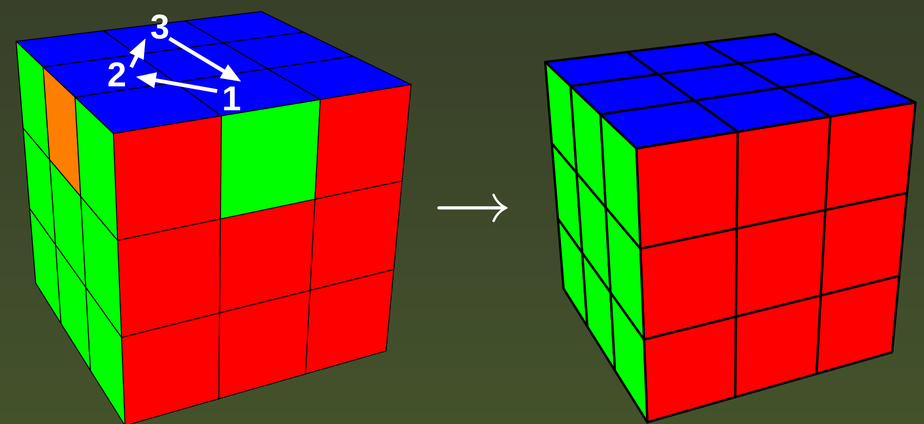
- Agora os cubinhos de cantos estão corretos, mas ainda falta posicionar e orientar as arestas.
- Assim como os cubinhos de canto, *não é possível trocar apenas dois cubinhos de aresta deixando tudo mais onde está*.

# Posicionando as arestas

- Agora os cubinhos de cantos estão corretos, mas ainda falta posicionar e orientar as arestas.
- Assim como os cubinhos de canto, *não é possível trocar apenas dois cubinhos de aresta deixando tudo mais onde está*.
- Mas podemos trocar três cubinhos de aresta ciclicamente, como veremos a seguir.

# Posicionando as arestas

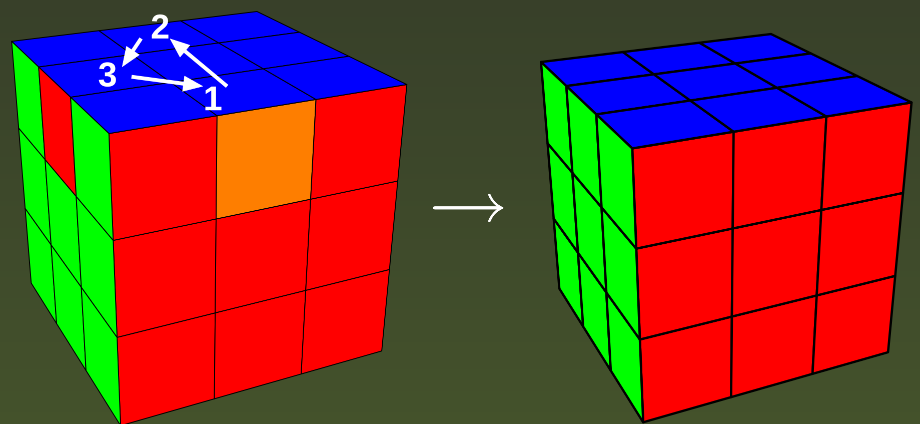
Movendo as arestas
$UF(1) \rightarrow UL(2) \rightarrow UB(3) \rightarrow UF(1)$ ciclicamente, em sentido horário:




A macro para isso é $L^2UF^{-1}BL^2FB^{-1}UL^2$ (12q).

# Posicionando as arestas

Movendo as arestas
$UF(1) \to UB(2) \to UL(3) \to UF(1)$ ciclicamente, em sentido anti-horário:




A macro para isso é $L^2U^{-1}F^{-1}BL^2FB^{-1}U^{-1}L^2$ (12q).

# Orientando as arestas

- Finalmente, todos os cubinhos de aresta estão em sua posição.

# Orientando as arestas

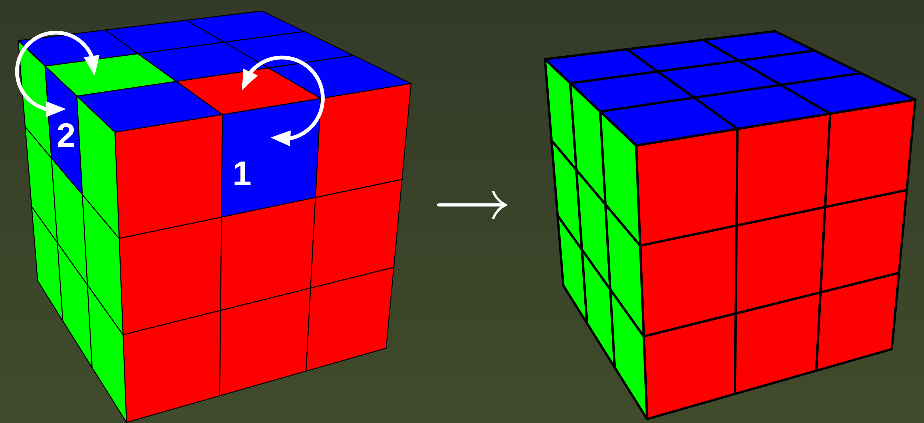
- Finalmente, todos os cubinhos de aresta estão em sua posição.
- Mas pode ocorrer de dois ou quatro deles estarem orientados incorretamente (por que?).

# Orientando as arestas

- Finalmente, todos os cubinhos de aresta estão em sua posição.
- Mas pode ocorrer de dois ou quatro deles estarem orientados incorretamente (por que?).
- Podemos corrigir isso girando um par de cubinhos de aresta ao mesmo tempo (por que não girar um só de cada vez?).

# Orientando as arestas

Girando as arestas $UF(1)$ e $UL(2)$ como na figura:



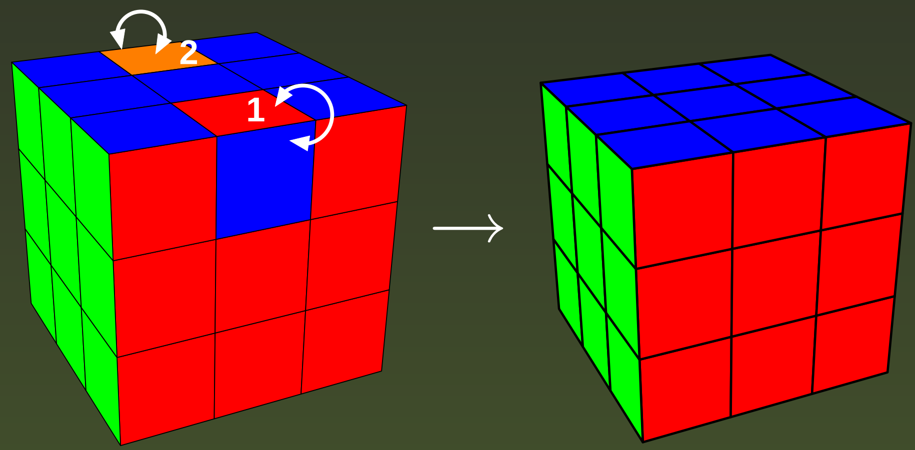

A macro para isso é a seguinte:

$$FUD^{-1}L^2U^2D^2RU^{-1}R^{-1}D^2U^2L^2DU^{-1}F^{-1}U \quad \text{(22q)}$$

Note que se $X = FUD^{-1}L^2U^2D^2R$, então essa macro é simplesmente $XU^{-1}X^{-1}U$.

# Orientando as arestas

Girando as arestas $UF(1)$ e $UB(2)$:




A macro para fazer isso é a seguinte:

$R^{-1}LFR^{-1}LDR^{-1}LBR^{-1}LU$

seguida de

$UR^{-1}LFR^{-1}LDR^{-1}LBR^{-1}L$ (24q).

Há um atalho:

$LF^{-1}UL^{-1}FB^{-1}UR^{-1}FU^{-1}RF^{-1}BU^{-1}$ (14q).

# Comutadores

- Vimos acima várias macros da forma $STS^{-1}T^{-1}$ realizando troca entre pares de cubinhos.

# Comutadores

- Vimos acima várias macros da forma $STS^{-1}T^{-1}$ realizando troca entre pares de cubinhos.
- Esse tipo de macro é chamada *Comutador*, em geral escrito $[S,T] = STS^{-1}T^{-1}$.

# Comutadores

- Vimos acima várias macros da forma $STS^{-1}T^{-1}$ realizando troca entre pares de cubinhos.
- Esse tipo de macro é chamada *Comutador*, em geral escrito $[S, T] = STS^{-1}T^{-1}$.
- Se você for capaz de encontrar seus próprios comutadores, então certamente poderá desenvolver sua própria estratégia para resolver o Cubo.

# Comutadores

- Vimos acima várias macros da forma $STS^{-1}T^{-1}$ realizando troca entre pares de cubinhos.
- Esse tipo de macro é chamada *Comutador*, em geral escrito $[S, T] = STS^{-1}T^{-1}$.
- Se você for capaz de encontrar seus próprios comutadores, então certamente poderá desenvolver sua própria estratégia para resolver o Cubo.
- O programa **Rubik** pode ajudá-lo nessa tarefa.

# Comutadores

- Vimos acima várias macros da forma $STS^{-1}T^{-1}$ realizando troca entre pares de cubinhos.
- Esse tipo de macro é chamada *Comutador*, em geral escrito $[S,T] = STS^{-1}T^{-1}$.
- Se você for capaz de encontrar seus próprios comutadores, então certamente poderá desenvolver sua própria estratégia para resolver o Cubo.
- O programa **Rubik** pode ajudá-lo nessa tarefa.
- Além disso se $o(S) = n$, experimente fazer $S^{(n/3)}$ ou $S^{(n/2)}$ e observe o que acontece.